

Tentamen

MVE470, Flervariabelanalys, K/Kf/Bt

2023-03-17 , 14.00–16.00

Examinator: Maria Roginskaya , Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Maria Roginskaya , telefon: 3570

Hjälpmedel: bifogat formelblad

För godkänt på tentamen krävs minst 40 poäng sammanlagt på tentamens båda delar (Godkändtdelen och Överbetygsdelen) , inklusive eventuella bonuspoäng från duggor 2023.

För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 60 resp. 80 poäng sammanlagt på tentamens båda delar, inklusive eventuella bonuspoäng.

Del 1: Godkändtdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. (20p)

Lösgör bladet och lämna in det som blad 1 tillsammans med övriga lösningar.

2. Hitta andragsrads Taylor approximation av $f(x, y) = e^{xy-2}$ i punkten $(1, 2)$. Använd den för att hitta approximativt värde i punkten $(1.1, 1.9)$. (10p)

Lösningförslag: $f(1, 2) = e^0 = 1$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = ye^{xy-2}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy-2}$, $\nabla f(1, 2) = (2, 1)$.
 $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} = y^2 e^{xy-2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^{xy-2} + xye^{xy-2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = x^2 e^{xy-2}$. Då $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(1, 2) = 4$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 2) = 3$, $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(1, 2) = 1$. $T_2 f(1 + h, 2 + k) = 1 + 2h + k + 2h^2 + 3hk + k^2/2$. $f(1.1, 1.9) \cong 1 + 0.2 - 0.1 + 0.02 - 0.03 + 0.005 = 1.095$.

3. I vilken punkt skär tangent planet till grafen av funktionen $\sin(x^2 + y) + 2x$ i origo och tangentlinje till en kurva $(\cos(t), \sin(t), \frac{t}{2\pi})$, $t \in \mathbb{R}$ i punkten $(1, 0, 1)$. (10p)

Lösningförslag: $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \cos(x^2 + y) + 2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \cos(x^2 + y)$, alltså blir normal till funktionsyta i origo $(2, 1, -1)$ och tangentplanens ekvation är $2x + y - z = 0$. För kurvan ser vi att den går genom $(1, 0, 1)$ när $t = 2\pi$, tangentriktning för kurvan är $(-\sin(t), \cos(t), \frac{1}{2\pi})$, alltså i $(1, 0, 1)$ är den $(0, 1, \frac{1}{2\pi})$, dvs. tangenten är $x = 1, y = (z - 1)/2\pi$. Snittet blir $x = 1$, $2 + (z - 1)/(2\pi) - z = 0$, $y = (z - 1)/(2\pi)$ i.e. $x = 1, z = (2 - 1/(2\pi))/(1 - 1/(2\pi))$, $y = 1/(2\pi - 1)$.

4. Beräkna integralen:

- (a) Beräkna $\int \int_R \sin(x) dA$, där R är det området i planet som begränsas av $x = 0, x = \pi$ och $\sin(x) \leq y \leq 2\sin(x)$. (6p)

Lösningförslag: $\int_0^\pi dx \int_{\sin(x)}^{2\sin(x)} \sin(x) dy = \int_0^\pi \sin(x) (2\sin(x) - \sin(x)) dx = \int_0^\pi \frac{1}{2} (1 - \cos(2x)) dx = \pi/2 - \frac{1}{4} [-\sin(2x)]_0^\pi = \pi/2$.

- (b) Låt K vara den kropp som begränsas av ytan $z = x^2 + y^2$ och planet $z = 2$. Beräkna $\int \int \int_K (x^2 z + y^2 z) dV$. (6p)

Lösningförslag: Kroppen beskrivs som $x^2 + y^2 \leq 2$, $x^2 + y^2 \leq z \leq 2$. Om $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2\}$ blir integralen $\int \int_D dx dy \int_{x^2+y^2}^2 (x^2 z + y^2 z) dz = \int \int_D (x^2 + y^2) [\frac{z^2}{2}]_{x^2+y^2}^2 dx dy = \int \int_D (x^2 + y^2) (2 - (x^2 + y^2)^2/2) dx dy$. När vi går över till polära koordinat får vi $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r^2 (2 - r^4/2) r dr = 2\pi [r^4/2 - r^6/12]_0^{\sqrt{2}} = 2\pi (2 - 2/3) = 8/3\pi$.

5. Beräkna kurvintegralen $\oint_{\partial D} ydx - xdy$ längs randen ∂D till området D som är begränsad av $y = 1 - x^2$ och x -axel, och är positiv orientering. (12p)

(a) Enligt definition

Lösningförslag: Om man ritat bild ser man att området är begränsad av $x \in [-1, 1]$, $y = 0$ på x -axeln och kurvan $(x, 1 - x^2)$ där $x \in [-1, 1]$. Med hänsyn till orientering blir det $\int_{-1}^1 0dx - \int_{-1}^1 (1 - x^2, -x)(1 - 2x)dx = -\int_{-1}^1 1 - x^2 + 2x^2dx = -2 - [x^3/3]_{-1}^1 = -2 + [1/3 + 1/3] = -8/3$.

(b) Med hjälp av Greens formel.

$$\oint_{\partial D} ydx - xdy = \int \int_D -2dA = -2 \int_{-1}^1 dx \int_0^{1-x^2} dy = -2 \int_{-1}^1 (1-x^2)dx = -2(2 - [x^3/3]_{-1}^1) = -2(2 - 2/3) = -2 \frac{4}{3} = -8/3.$$

VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

6. Avgör i vilka punkter funktionen $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + 4y^2}$ är kontinuerlig (tydlig motiveringen krävs!). (12p)

Lösningförslag: När $x^2 + 4y^2 \neq 0$ är f kontinuerlig, då båda $x^2 y$ och $x^2 + 4y^2$ är polynomer, så kontinuerliga, och kvoten av kontinuerliga funktioner är kontinuerlig om nämnare är skild från 0. $x^2 + 4y^2 = 0$ endast om $(x, y) = (0, 0)$. När $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ har vi att $xy/(x^2 + 4y^2)$ är begränsad, då $4xy \leq (x^2 + 4y^2)$, och $x \rightarrow 0$. Alltså, gränsvärdet finns och är 0, då vi har produkt av en begränsad funktion och en funktion som går mot 0.

7. Låt $\mathbf{F}$ vara vektorfältet $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (z + \sin(x^2 + y^2 + z^2 - 1))\mathbf{k}$. bestäm arbete som fältet gör längs en kurva $x^2 + y^2 = 1, z = 0$. (12p)

- (a) Från definition. Kurvan är en cirkel $(x, y, z) = (\cos(t), \sin(t), 0), t \in [0, 2\pi]$. Så arbetet är $\int_0^{2\pi} (\cos(t), \sin(t), 0)(-\sin(t), \cos(t), 0)dt = 0$.
- (b) Med hjälp av Stokes sats (välj en lämplig yta). (Notera att area av en disk av radius r är πr^2 , och area av en sfär av radius r är $4\pi r^2$.) $\text{rot}(\mathbf{F}) = \cos(x^2 + y^2 + z^2 - 1)2y\mathbf{i} + (-\cos(x^2 + y^2 + z^2 - 1)2x)\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$. Om vi väljer som yta som har kurva som randen en disk av radius 1 med medelpunkt i origo, som ligger i xy -planet, då är normelen till den i alla punkter $\mathbf{k}$, dvs $\text{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} = 0$, och dess integral över disken är 0.

8. Formulera och bevisa medelvärdesats för dubbelintegral. . (12p)
- Se boken.**

Lycka till!
Maria Roginskaya

Anonym kod	MVE470, Flervariabelanalys, K/Kf/Bt	sid.nummer 1	Poäng
------------	-------------------------------------	------------------------	-------

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

- (a) Bestäm riktningsderivatan av funktionen $f(x, y) = e^{xy-2} + x^2 + y^2$ i punkten $(-1, -2)$ i riktningen $\mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$ (glöm inte normera riktningen). (4p)

Lösningsförslag: $\nabla f = (ye^{xy-2} + 2x, xe^{xy-2} + 2y)$, så $\nabla f(-1, -2) = (-2 - 2, -1 - 4) = (-4, -5)$. $f'_u = (-4, -5) \cdot (1, -1)/\sqrt{2} = 1/\sqrt{2}$.

Svar:

- (b) Bestäm maximum av funktionen $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ över kurvan $x^2 + y^2 = 4$. (6p)

Lösningsförslag: Kurvan kan parametreras som $(2 \cos(t), 2 \sin(t))$, så vi maximerar $\cos^2(t) + \sin(t) \cos(t) + \sin^2(t) = 4(1 + \frac{1}{2} \sin(2t))$. Maximalt värdet av $\sin(2t)$ är 1, så maximum av funktionen är $4(1 + \frac{1}{2}) = 6$. **Svar:**

- (c) Kontrollera att funktionen $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ har en stationär punkt i origo och avgör om denna är en maximum-, minimum-, eller sadelpunkt. . **Lösningsförslag:** (4p)

$\nabla f = (2x + y, x + 2y)$, så $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$, alltså - stationär punkt. Hessian är $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ Determinanten av Hessian är $4 - 1 > 0$, så det är maximum eller minimum. I vänster-övre hörn står $2 > 0$, så matrisen är positiv, och vi har en minimum.

Svar:

- (d) Beräkna divergensen och rotationen för vektorfältet $\mathbf{F}(x, y, z) = (yz+2x)\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$. Är vektorfältet konservativt? Är det källfritt? Är det virvelfritt? (6p)

Lösningsförslag: $\text{div}(\mathbf{F}) = 2 \neq 0$, så fältet är inte källfritt. $\text{rot}(\mathbf{F}) = (x - x)\mathbf{i} + (y - y)\mathbf{j} + (z - z)\mathbf{k} = 0$, så fältet är virvelfritt, och då den är definierad och deriverbar för hela rummet, är den konservativ.

Svar:

Formelblad för MVE655, läsåret 21/22

Trigonometri.

$$\begin{aligned}\cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) & \sin(x)\sin(y) &= \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y)) \\ \sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) & \sin(x)\cos(y) &= \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y)) \\ \cos(x)\cos(y) &= \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y)) & \tan(x+y) &= \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}\end{aligned}$$

Integralkatalog

$$\begin{aligned}\int x^a dx &= \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq -1 & \int \frac{1}{x} dx &= \ln|x| + C \\ \int \sin x dx &= -\cos x + C & \int \cos x dx &= \sin x + C \\ \int \frac{1}{\cos^2 x} dx &= \tan x + C & \int \frac{1}{\sin^2 x} dx &= -\cot x + C \\ \int e^x dx &= e^x + C & \int a^x dx &= \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad 0 < a \neq 1 \\ \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx &= \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0 & \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx &= \ln|f(x)| + C \\ \int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}} dx &= \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}} + C, \quad a > 0 & \int \sqrt{a-x^2} dx &= \frac{1}{2}x\sqrt{a-x^2} + \frac{a}{2} \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}} + C, \quad a > 0 \\ \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx &= \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C, \quad a \neq 0 & \int \sqrt{x^2+a} dx &= \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a} + a \ln|x + \sqrt{x^2+a}|) + C\end{aligned}$$

Maclaurinutvecklingar

$$\begin{aligned}e^x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \\ \sin x &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \\ \cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \\ (1+x)^\alpha &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots, \quad |x| < 1, \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\dots 1} \\ \ln(1+x) &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \quad -1 < x \leq 1 \\ \arctan x &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots, \quad |x| \leq 1\end{aligned}$$

Övrigt

Masscentrum (x_T, y_T, z_T) för Ω ges av $x_T = \frac{\iiint_{\Omega} x \rho(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) dx dy dz}$, analogt för y_T, z_T .

$\rho(x, y, z)$ är densiteten.