

Tentamen

MVE470, Flervariabelanalys, K/Kf/Bt

2023-06-09 , 8.30–12.30

Examinator: Maria Roginskaya , Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Maria Roginskaya , telefon: 3570

Hjälpmedel: bifogat formelblad

För godkänt på tentamen krävs minst 40 poäng sammanlagt på tentamens båda delar (Godkändtdelen och Överbetygsdelen) , inklusive eventuella bonuspoäng från duggor 2023.

För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 60 resp. 80 poäng sammanlagt på tentamens båda delar, inklusive eventuella bonuspoäng.

Del 1: Godkändtdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. (20p)
Lösgör bladet och lämna in det som blad 1 tillsammans med övriga lösningar.

2. Hitta andragsrads Taylor approximation av $f(x, y) = x^y$ i punkten $(1, 2)$. Använd den för att hitta approximativt värde av $(1.1)^{1.9}$. (10p)

Lösningsförslag: $\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \ln(x)x^y$. $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} = y(y-1)x^{y-2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = x^{y-1} + y \ln(x)x^{y-1}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = \ln(x)^2 x^y$. Så, $f(1, 2) = 1$, $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = 2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = 0$. $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(1, 2) = 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = 0$.

Taylor polynomen blir då $T_f(\tilde{x}, \tilde{y}) = 1 + 2(\tilde{x} - 1) + 0(\tilde{y} - 2) + \frac{1}{2}(2(\tilde{x} - 1)^2 + 2 \cdot 1(\tilde{x} - 1)(\tilde{y} - 2) + 0(\tilde{y} - 2)^2)$.

Approximation blir uträknat med $\tilde{x} = 1.1$ och $\tilde{y} = 1.9$, dvs. $1.1^{1.9} = f(1.1, 1.9) \approx T_f(1.1, 1.9) = 1 + 2 \cdot 0.1 + 1/2(0.02 - 0.02) = 1.2$.

3. Bestäm maximum av funktionen $f(x, y) = x^2 + xy + y$ över området begränsad av $y = 4 - x^2$ och x-axeln. (10p)

Lösningsförslag: Först ser vi kritiska punkter $\nabla f = (2x + y, x + 1)$, så om $\nabla f = 0$, gäller $(2x + y, x + 1) = (0, 0)$, i.e. $x = -1, y = 2$. Denna punkt ligger i området, och måste kontrolleras. Randen består av två delar: en $(x, y) = (t, 4 - t^2)$, där $t \in [-2, 2]$, och en $(x, y) = (t, 0)$, där $t \in [-2, 2]$. På den första $f(t) = t^2 + t(4 - t^2) + (4 - t^2) = 4 + 4t - t^3$, och extrem punkterna är $4 - 3t^2 = 0$, i.e. $t = \pm 2/\sqrt{3}$, $(x, y) = (\pm 2/\sqrt{3}, 4 - 4/3 = 8/3)$. Också ändpunkterna $(\pm 2, 0)$ ska kontrolleras. På den andra $f(t) = t^2$ och har extrempunkt i $t = 0$, $(x, y) = (0, 0)$ och samma ändpunkterna.

Vi ska alltså jämföra värden i punkterna $(-1, 2)$, $(\pm 2/\sqrt{3}, 8/3)$, $(0, 0)$, och $(\pm 2, 0)$. Värden blir 1, $4 \pm 16/3\sqrt{3}$, 0, 4. Vi ser att den största värdet är $4 + 16/3\sqrt{3}$, som uppnås i $(2/\sqrt{3}, 8/3)$.

4. Beräkna integralen:

- (a) Beräkna $\iint_R x^2 dA$, där R är det området i planet som begränsas av $x = 0, y = 0$ och $x + y = 1$. (6p)

Lösningsförslag:

$$\iint_R x^2 dA = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} x^2 dy = \int_0^1 x^2(1-x) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^1 = 1/3 - 1/4 = 1/12.$$

- (b) Låt K vara den kon som begränsas av ytan $z^2 = x^2 + y^2$ och planet $z = 2$. Beräkna $\int \int \int_K (x^2 z + y^2 z) dV$. (6p)

Lösningförslag: Projektionen på xy -planet är en cirkel D med medelpunkten i origo och radius 2.

$$\begin{aligned} \int \int \int_K (x^2 z + y^2 z) dV &= \int \int_D \int_r^2 r^2 z dz dA = \int \int_D r^2 \left[\frac{1}{2} z^2 \right]_r^2 dA = \int \int_D r^2 \left(2 - \frac{1}{2} r^2 \right) dA = \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \left(2r^2 - \frac{1}{2} r^4 \right) r dr = 2\pi \left[\frac{1}{2} r^4 - \frac{1}{12} r^6 \right]_0^2 = 2\pi \left(8 - \frac{16}{3} \right). \end{aligned}$$

5. Beräkna kurvintegralen $\oint_{\partial D} y dx - x dy$ längs randen ∂D till området D som är begränsad av $x^2 + y^2 = 1$ och är positiv orienterad. (12p)

(a) Enligt definition

Lösningförslag: Vi kan parametrisera cirkeln som $(x, y) = (\cos(t), \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi)$. $\oint_{\partial D} y dx - x dy = \int_0^{2\pi} \sin(t) d(\cos(t)) - \cos(t) d(\sin(t)) = \int_0^{2\pi} (-\sin^2(t) - \cos^2(t)) dt = \int_0^{2\pi} -1 dt = -2\pi$.

(b) Med hjälp av Greens formel.

Lösningförslag: $\oint_{\partial D} y dx - x dy = \int \int_D \frac{\partial(-x)}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial y} dA = \int \int_D -2 dA = -2\pi$.

VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

6. Avgör i vilka punkter funktionen $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + 2y^2}$ är kontinuerlig (tydlig motiveringen krävs!). (12p)

Lösningförslag: Observera, att när nämnare är skild från noll, funktionen är kontinuerlig som kvot av två polynomer (som är kontinuerlig, och nämnare skild från noll). Det enda punkt i vilken nämnare är noll är origo.

När det gäller origo: för $(x, y) = (t, 0)$ gäller $\lim_{t \rightarrow 0} f(t, 0) = 0$, medan för $(x, y) = (t, t)$ gäller $\lim_{t \rightarrow 0} f(t, t) = 1/3$, i.e. vi får olika gränsvärde när vi kommer till origo på olika sätt. Gränsvärdet i origo alltså saknas.

Svaret: Funktionen är kontinuerlig för alla punkter utom origo.

7. Låt $\mathbf{F}$ vara vektorfältet $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} - y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. bestäm arbete som fältet gör längs en kurva $x^2 + y^2 = 1, z = 1$. (12p)

(a) Från definition.

Vi parametriserar kurvan som $(x, y, z) = r(t) = (\cos(t), \sin(t), 1)$, $t \in [0, 2\pi)$. Då $dr = (-\sin(t), \cos(t), 0)dt$, så $\int F \cdot dr = \int_0^{2\pi} (\cos(t), -\sin(t), 1)(-\sin(t), \cos(t), 0)dt = \int_0^{2\pi} -2\sin(t)\cos(t) = \int_0^{2\pi} -\sin(2t)dt = 0$.

(b) Med hjälp av Stokes sats (välj en lämplig yta).

$\text{curl}(F) = \mathbf{0}$, så om vi tar vilken som helst yta som har kurvan som randen, t.ex. $S = \{(x, y, 1) : x^2 + y^2 \leq 1\}$, så är $\iint_S \text{curl}(F) \cdot (N)dS = 0$.

8. Formulera Greens formel. Bevisa bara för x- och y- enkla områden. . (se boken) (12p)

Lycka till!
Maria Roginskaya

Anonym kod	MVE470, Flervariabelanalys, K/Kf/Bt	sid.nummer 1	PoÄng
------------	-------------------------------------	-----------------	-------

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats

- (a) Bestäm riktningsderivatan av funktionen $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$ i punkten $(-1, 2)$ i riktningen $\mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$ (glöm inte normera riktningen). (4p)

Lösningsförslag: $\nabla f = (2x \cos(x^2 + y^2), 2y \cos(x^2 + y^2))$, så i punkten $(-1, 2)$ vi har $\nabla f(-1, 2) = (-2 \cos(5), 4 \cos(5))$. Normerar $\|u\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$, och $\nabla_u f = (-2 \cos(5), 4 \cos(5))(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{6}{\sqrt{2}} \cos(5)$.

Svar:

- (b) Hitta ekvationen för tangentplanet till $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ i punkten $(2, 1)$. (4p)

Lösningsförslag: $\nabla f = (2x + y, x + 2y)$, så $\nabla f(2, 1) = (5, 4)$. $f(2, 1) = 7$. Normalen till planet är $(5, 4, -1)$ och den ska gå genom $(2, 1, 7)$. Ekvationen blir $5(x - 2) + 4(y - 1) - (z - 7) = 0$.

Svar:

- (c) Bestäm en potential till det konservativa vektorfältet $\mathbf{F} = (2x + y)\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ Lösningsförslag: (3p)

$p(s, t) = \int_{(0,0)}^{(s,t)} (2x + y)dx + xdy = \int_0^s 2xdx + \int_0^t sdy = s^2 + st$. Med andra ord, $p(x, y) = x^2 + xy$. (Man kan också inse att $\nabla p = (2x + y, x)$.)

Svar:

- (d) Beräkna divergensen och rotationen för vektorfältet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (y + x^2)\mathbf{i} + x\mathbf{j} + (y + z^2)\mathbf{k}.$$

Är vektorfältet konservativt? Är det källfritt? Är det virvelfritt? (6p)

bf Lösningsförslag: $\text{div}(\mathbf{F}) = 2x + 2z \neq 0$, så fältet är inte källfritt. $\text{curl}(\mathbf{F}) = 1\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + (1 - 1)\mathbf{k} = \mathbf{i} \neq 0$. Fältet är inte virvelfritt, och därmed inte konservativt.

Svar:

Formelblad för MVE655, läsåret 22/23

Trigonometri.

$$\begin{aligned}\cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) & \sin(x)\sin(y) &= \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y)) \\ \sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) & \sin(x)\cos(y) &= \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y)) \\ \cos(x)\cos(y) &= \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y)) & \tan(x+y) &= \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}\end{aligned}$$

Integralkatalog

$$\begin{aligned}\int x^a dx &= \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq -1 & \int \frac{1}{x} dx &= \ln|x| + C \\ \int \sin x dx &= -\cos x + C & \int \cos x dx &= \sin x + C \\ \int \frac{1}{\cos^2 x} dx &= \tan x + C & \int \frac{1}{\sin^2 x} dx &= -\cot x + C \\ \int e^x dx &= e^x + C & \int a^x dx &= \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad 0 < a \neq 1 \\ \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx &= \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0 & \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx &= \ln|f(x)| + C \\ \int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}} dx &= \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}} + C, \quad a > 0 & \int \sqrt{a-x^2} dx &= \frac{1}{2}x\sqrt{a-x^2} + \frac{a}{2} \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}} + C, \quad a > 0 \\ \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx &= \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C, \quad a \neq 0 & \int \sqrt{x^2+a} dx &= \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a} + a \ln|x + \sqrt{x^2+a}|) + C\end{aligned}$$

Maclaurinutvecklingar

$$\begin{aligned}e^x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \\ \sin x &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \\ \cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \\ (1+x)^\alpha &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots, \quad |x| < 1, \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\dots 1} \\ \ln(1+x) &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \quad -1 < x \leq 1 \\ \arctan x &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots, \quad |x| \leq 1\end{aligned}$$

Övrigt

Masscentrum (x_T, y_T, z_T) för Ω ges av $x_T = \frac{\iiint_{\Omega} x \rho(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) dx dy dz}$, analogt för y_T, z_T .
 $\rho(x, y, z)$ är densiteten.