Övningar (med vissa lösningar) MVE100 Avsnitt 5 (F15-F18)

Erik I. Broman

10 februari 2021

1 Inledning

Denna gång kommer vi ha användning för kommandot

(I) *fzero* i Matlab hittar nollställen för funktioner.

1.1 Rayleigh kvot

1. Detta är Övning 33 i häftet DE/EFH:

   (a) Lös egenvärdesproblemet

   $$-y'' = \lambda y \text{ med randvärden } y'(0) = 0, y'(1) + y(1) = 0.$$

   (b) Vilken olikhet erhålles i detta fall med hjälp av minimivärdet på Rayleigh's kvot?

   Lösning:

   (a) Vi har studerat denna ekvation i Avsnitt 4 (övning 6). Här kan vi dock använda oss av Följdsatsen längst ner på sidan 49 i häftet för att visa att ekvationen enbart har positiva egenvärden. På så sätt kan vi strunta i det som i annars heter Fall 1 och 2.

   Vi ser att vårt problem är på Sturm-Liouville form då den uppfyller (5.20) i häftet: Här är

   (I) $p(x) \equiv 1$
   (II) $q(x) \equiv 0$
   (III) $w(x) \equiv 1$
   (IV) $a_1 = 1, a_2 = 0, b_1 = b_2 = 1.$

Sats 5.3 och följdsatsen ger nu att vi enbart kan ha positiva egenvärden och vi behöver därför bara betrakta fallet $\lambda > 0$.
För $\lambda > 0$ får vi att

$$y(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x),$$

så att

$$y'(x) = -c_1\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}x) + c_2\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}x).$$

Vårt första randvillkor ger då

$$0 = y'(0) = c_2\sqrt{\lambda},$$

så att $c_2 = 0$. Vårt andra randvillkor ger att

$$y'(1) + y(1) = -c_1\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}) + c_1\cos(\sqrt{\lambda}x) = 0$$

eller ekvivalent

$$\sqrt{\lambda}\tan(\sqrt{\lambda}) = 1.$$

Om vi låter $r_1, r_2, \ldots$ vara de positiva rötterna till ekvationen $r\tan(r) = 1$ ser vi att $\lambda_n = r_n^2$.

(b) Rayleigh's kvot definieras som

$$R(v) = \frac{\langle Bv, v\rangle}{\langle Av, v\rangle}$$

och enligt sats från föreläsningen har vi att $R(v) \geq \lambda_1$ för varje funktion $v \in V$. Med $B = -D^2$ och $A = I$ ser vi att

$$R(v) = \frac{\langle -v'', v\rangle}{\langle v, v\rangle} \geq \lambda_1 \text{ så att } \langle -v'', v\rangle \geq \lambda_1\langle v, v\rangle. \tag{1}$$

Vi har vidare att

$$\begin{aligned}\langle -v'', v\rangle = \int_0^1 -v''(x)v(x)dx &= \big[-v'(x)v(x)\big]_0^1 + \int_0^1 (v'(x))^2 dx \\ &= -v'(1)v(1) + v'(0)v(0) + \int_0^1 (v'(x))^2 dx = (v(1))^2 + \int_0^1 (v'(x))^2 dx,\end{aligned}$$

där vi använder att $-v'(1) = v(1)$ och att $v'(0) = 0$. Vi får då från (1) att

$$(v(1))^2 + \int_0^1 (v'(x))^2 dx \geq \lambda_1 \int_0^1 (v(x))^2 dx,$$

för all $v \in V$.

2. Detta är övning 36 i häftet DE/EFH:

Uppskatta det minsta egenvärdet till

$$-y'' = \lambda \cos\left(\frac{\pi x}{6}\right) y \text{ med RV } y(-1) = y(1) = 0.$$

Lösning: Vi använder jämförelsesatsen (med tillhörande notation). Här är $p(x) \equiv 1$ så vi kan ta $p_(x) \equiv 1$ och $p_2(x) \equiv 1$. Vidare är $q(x) \equiv 1$ så vi måste "bara" analysera $w(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{6}\right)$. Observera att vi betraktar $x \in (-1, 1)$, vilket vi ser genom att titta på randvillkoren. Vi vet att $\cos(0) = 1$ och att den är avtagande fram till $x = \pi/2$. Vi ser därför att

$$\cos\left(\frac{\pi x}{6}\right) \leq \cos(0) = 1 \text{ och att } \cos\left(\frac{\pi x}{6}\right) \geq \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

och vi tar därför $w_2(x) \equiv \frac{\sqrt{3}}{2}$ och $w_1(x) \equiv 1$. Vi betraktar därför

Problem 2: Här är $-y'' = \lambda y$ och $y(-1) = y(1) = 0$. Lösningen är (Vi behöver bara betrakta positiva $\lambda > 0$ då alla villkor i Följdsaten på sid 49 är uppfyllda.) då

$$y(x) = a\cos(\sqrt{\lambda}x) + b\sin(\sqrt{\lambda}x).$$

Randvillkoren ger sedan att

$$0 = y(-1) = a\cos(-\sqrt{\lambda}) + b\sin(-\sqrt{\lambda}) = a\cos(\sqrt{\lambda}) - b\sin(\sqrt{\lambda}),$$

och att

$$0 = y(1) = a\cos(\sqrt{\lambda}) + b\sin(\sqrt{\lambda}).$$

Detta leder till villkoren

$$\begin{bmatrix} \cos(\sqrt{\lambda}) & -\sin(\sqrt{\lambda}) \\ \cos(\sqrt{\lambda}) & \sin(\sqrt{\lambda}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

och detta har enligt linjär algebra enbart en icketrivial lösning då

$$0 = \begin{vmatrix} \cos(\sqrt{\lambda}) & -\sin(\sqrt{\lambda}) \\ \cos(\sqrt{\lambda}) & \sin(\sqrt{\lambda}) \end{vmatrix} = 2\cos(\sqrt{\lambda})\sin(\sqrt{\lambda}).$$

Vi har därför att $\sqrt{\lambda_k} = \frac{k\pi}{2}$ så att egenvärdena är därför

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{2}\right)^2 \text{ för } k = 1, 2, \ldots$$

Jämförelsesatsen ger då att

$$\frac{\pi^2}{4} = \lambda_1^{(1)} \leq \lambda_1.$$

Problem 1: Nu är $-y'' = \lambda\frac{\sqrt{3}}{2}y$ och $y(-1) = y(1) = 0$. Som ovan blir

$$y(x) = a\cos\left(\sqrt{\lambda\frac{\sqrt{3}}{2}}x\right) + b\sin\left(\sqrt{\lambda\frac{\sqrt{3}}{2}}x\right).$$

Randvillkoren ger sedan att

$$0 = y(-1) = a\cos\left(\sqrt{\lambda\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) - b\sin\left(\sqrt{\lambda\frac{\sqrt{3}}{2}}\right),$$

och att

$$0 = y(1) = a\cos\left(\sqrt{\lambda\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) + b\sin\left(\sqrt{\lambda\frac{\sqrt{3}}{2}}\right).$$

Som ovan får vi en icketrivial lösning då

$$0 = \cos\left(\sqrt{\lambda\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)\sin\left(\sqrt{\lambda\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)$$

så att

$$\lambda_k\frac{\sqrt{3}}{2} = \left(\frac{k\pi}{2}\right)^2 \text{ för } k = 1, 2, \ldots$$

Vi får då att

$$\lambda_1 \leq \lambda_1^{(2)} = \frac{\pi^2}{4}\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\pi^2}{2\sqrt{3}} = \frac{\pi^2\sqrt{3}}{6}$$

3. Detta är övning 45 i DE/EFH:

Betrakta återigen (som i övning 33)

$$-y'' = \lambda y \text{ med RV } y'(0) = 0 \text{ och } y'(1) + y(1) = 0.$$

Börja med ett lämpligt polynom $u_0(x)$ som uppfyller randvillkoren och hitta därefter $u_1(x)$ och $u_2(x)$ från sambandet $Bu_k = Au_{k-1}$.

Lösning: Vi ansätter $u_0(x) = x^2 + c_1x + c_0$ och får att $u_0'(x) = 2x + c_1$. Randvillkoren ger oss att

$$0 = u_0'(0) = c_1 \text{ och } 0 = u_0'(1) + u_0(1) = 2 + c_1 + 1 + c_1 + c_0 = 3 + c_0$$

så att $c_0 = -3$. Vi får då $u_0(x) = x^2 - 3$.

Vi får sedan att $-u_1''(x) = u_0(x) = x^2 - 3$ så att $u_1''(x) = -x^2 + 3$. Detta ger

$$u_1(x) = -\frac{x^4}{12} + 3\frac{x^2}{2} + c_2x + c_3$$

så att $u_1'(x) = -\frac{x^3}{3} + 3x + c_2$. Vi får då att $0 = u_1'(0) = c_2$ och att

$$0 = u_1'(1)+u_1(1) = -\frac{1}{3}+3-\frac{1}{12}+3\frac{1}{2}+c_3 = c_3+\frac{-4+36-1+18}{12} = c_3+\frac{49}{12}$$

så att $c_3 = -\frac{49}{12}$. Vi ser då att

$$u_1(x) = -\frac{x^4}{12} + 3\frac{x^2}{2} - \frac{49}{12}.$$

I nästa steg betraktar vi $-u_2''(x) = u_1(x)$ och får att

$$u_2(x) = \frac{x^6}{360} - \frac{x^4}{8} + \frac{49x^2}{24} + c_4x + c_5,$$

så att

$$u_2'(x) = \frac{x^5}{60} - \frac{x^3}{2} + \frac{49x}{12} + c_4,$$

På samma sätt som innan ger $u_2'(0) = 0$ att $c_4 = 0$. Vårt andra randvillkor ger oss sedan att

$$0 = u_2'(1) + u_2(1) = \frac{1}{60} - \frac{1}{2} + \frac{49}{12} + \frac{1}{360} - \frac{1}{8} + \frac{49}{24} + c_5 = \frac{1987}{360} + c_5,$$

så att

$$c_5 = -\frac{1987}{360}.$$

OBS, HÄFTET VISAR FEL!!! De föreslår $u_0(x) = 3x - 2x^2$ så att $u_0'(x) = 3 - 4x$ och ser då att $u_0'(0) = 3 - 0 = 3$ och $u_0'(1) + u_0(1) = 3 - 4 + 3 - 2 = 0$. Jag misstänker att de av misstag använt randvillkoret $u_0(0) = 0$ istället för $u_0'(0) = 0$.

4. Detta är övning 47 i DE/EFH:

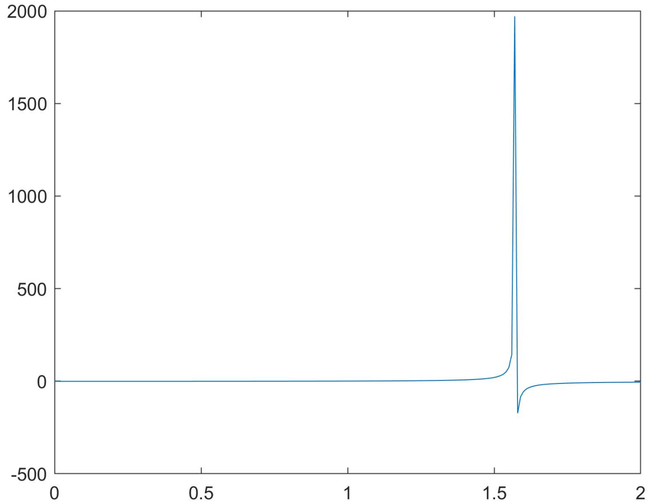
   Beräkna Schwarz konstanter och kvoter för iterationerna i Uppgift 45. Undersök noggrannheten i den erhållna approximationen för λ_1.

   Lösning: Som "benchmark" börjar vi med att ta fram ett approximativt värde för λ_1 med hjälp av Övning 1 (dvs 33 i DE/EFH). Där står det att $\lambda_1 = r_1^2$ där r_1 är den minsta positiva lösningen till ekvationen $r\tan(r) = 1$.

   Vi gör så här i Matlab:

```
>>format long
>>fzero(@(x) x*tan(x)-1,0.3)
ans = 0.860333
```

   men noggranna som vi är plottar vi också funktionen. En inspektion ger att det mycket riktigt är så att den först positiva roten befinner sig runt det angivna värdet. Vi gör inspektionen så att vi inte råkar missa något (se Figurer 1 och 2).



Figur 1: En plot av $r\tan(r)-1$ i intervallet $[0,2]$. Det är svårt att se var första nollstället är.

Vi vet därför att
$$\lambda_1 = r_1^2 \approx 0.74017388. \tag{2}$$

Låt oss nu betrakta kvoterna $\frac{u_n(x)}{u_{n+1}(x)}$ för $x \in [0,1]$. Vi använder igen Matlab:

```
>>x=0:0.01:1;
>>u0=x.^2-3;
>>u1=-x.^4/12+3*x.^2/2-49/12;
>>u2=x.^6/360-x.^4/8+49*x.^2/24-1987/360;
```

och plottar nu u_0/u_1 och u_1/u_2, se Figur 3 och 4.

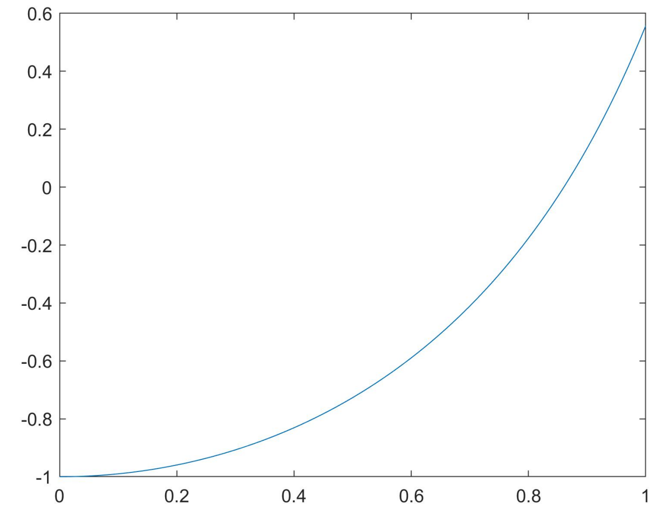
Vi kör nu på med Schwarz talen. Vi har att

$$a_k = \langle Au_k, u_0\rangle = \langle u_k, u_0\rangle = \int_0^1 u_k(x)u_0(x)dx.$$

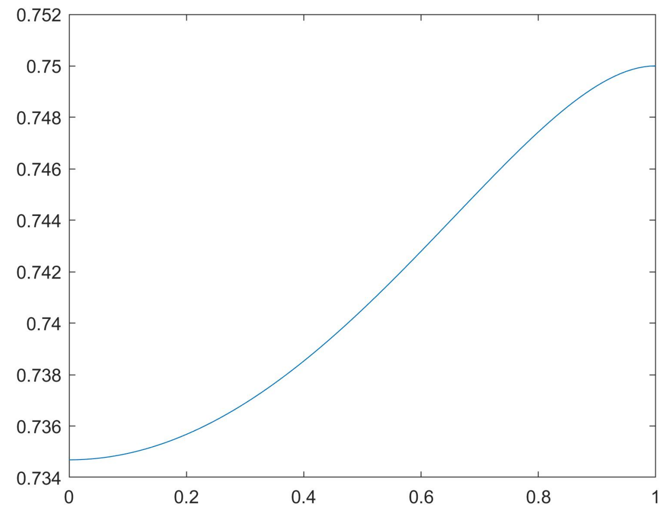
Vi får då att (jag fuskar lite och använder Mathematica)

$$a_0 = \int_0^1 (u_0(x))^2\,dx = \int_0^1 \left(x^2-3\right)^2 dx = \frac{36}{5},$$

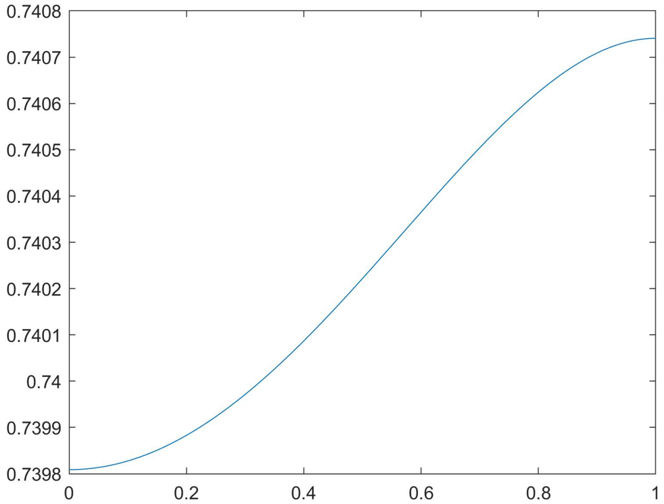
$$a_1 = \int_0^1 u_1(x)u_0(x)dx = \int_0^1 \left(-\frac{x^4}{12} + 3\frac{x^2}{2} - \frac{49}{12}\right)(x^2-3)dx = \frac{3064}{315}$$



Figur 2: En plot av $r\tan(r) - 1$ i intervallet $[0, 1]$. Man ser att första positiva roten ligger någonstans mellan 0.8 och 0.9. Man kan såklart zooma för att få en bättre uppfattning.



Figur 3: En plot av kvoten $u_0(x)/u_1(x)$. Plotten är konsistent med ekvation (2).



Figur 4: En plot av kvoten $u_1(x)/u_2(x)$. Plotten är konsistent med ekvation (2).

och

$$a_2 = \int_0^1 u_2(x)u_0(x)dx = \int_0^1 \left(\frac{x^6}{360} - \frac{x^4}{8} + \frac{49x^2}{24} - \frac{1987}{360}\right)(x^2-3)dx = \frac{37256}{2835}.$$

Vi får då kvoterna

$$\mu_1 = \frac{a_0}{a_1} = \frac{567}{766} \approx 0.740208877284595 \tag{3}$$

och

$$\mu_2 = \frac{a_1}{a_2} = \frac{3447}{4657} \approx 0.740176079020829. \tag{4}$$

Vi ser att μ_1 överrenstämmer med (2) på tre decimaler medans μ_2 överrenstämmer med (2) på fem decimaler.

För att göra arbetet komplett använder vi oss av Sats 5.7 del b i DE/EFH, dvs att

$$0 \leq \mu_k - \lambda_1 \leq \frac{\mu_k}{m - \mu_k}(\mu_{k-1} - \mu_k). \tag{5}$$

Vi vill testa hur nära μ_2 och λ_1 befinner sig. För att kunna använda (5) måste vi hitta ett tal $m \leq \lambda_2$. Vi använder därför återigen Matlab:

```
>>format long
>>fzero(@(x) x*tan(x)-1,1.6)
ans = 1.570796326794897
```

men en inspektion av plottar ger att detta inte är korekt. För att förstå varför, betrakta Figur 1. Den uppvisar ett hopp vilket beror på att $\tan(x)$ hoppar från $+\infty$ till $-\infty$ vid $\pi/2$. Matlabs kommando $fzero$ detekterar teckenförändringar och tolkar därför diskontinuiteten vid $x = \pi/2$ felaktigt som ett nollställe. Vi måste därför leta vidare:

```
>>format long
>>fzero(@(x) x*tan(x)-1,3)
ans = 3.425618459481728
```

och speciellt ser vi att $3.426 \le r_2$ så att vi kan ta

$$\lambda_2 = r_2^2 \ge 11.7 = m.$$

Insatt i (5) ger detta med $k = 2$

$$0 \le \mu_2 - \lambda_1 \le \frac{\mu_2}{11.7 - \mu_2}(\mu_1 - \mu_2) \approx 2.215 * 10^{-6},$$

där vi använder (3) och (4).