Övningar (med vissa lösningar) MVE100 Avsnitt 1 (F1-F3)

Erik I. Broman

12 januari 2022

1 Inledning

Följande kommandon i Matlab kan vara bra att känna till (använd hjälpfunktionen i Matlab eller googla för detaljerad info). Här är A, B etc *nxn*-matriser, medans t är en parameter.

(I) *eig(B,A)* För att beräkna egenvärden och egenvektorer.

(II) *expm(A)* Beräknar e^A. OBS, kommandot exp(A) beräknar exponenten av A elementvis.

(III) *syms t* Säger till Matlab att t skall behandlas som en symbol.

(IV) *expm(t*A)* Beräknar e^{tA} symboliskt (om t är en symbol).
OBS Kommandot *exp(t*A)* gör något helt annat (se ovan).

1.1 Omskrivning av högre ordnings ODE

Betrakta

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = c_m u^{(m)} + \cdots + c_0 u,$$

där $m \leq n-1$. Då gäller att vi kan skriva om detta som $\dot{x} = Ax + bu$ och $y = c^T x$ där

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Detta är en generalisering av det vi kom fram till på föreläsning 1. Använd detta för att lösa följande problem

1. **(Lösning finnes)** Betrakta ekvationen

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = 3\dot{u} + u. \tag{1}$$

(a) Skriv om detta som ett första ordningens problem (dvs bestäm A, b och c ovan).

(b) Visa att detta ger följande system av ekvationer:

$$\begin{aligned} y &= x_1 + 3x_2 \\ \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - 2x_2 + u \end{aligned}$$

(c) Utgå från ekvationerna i (b) och visa att dessa uppfyller (1).

2. Betrakta ekvationen

$$\dddot{y} - \dot{y} + 3y = \ddot{u} + u. \tag{2}$$

(a) Skriv om ekvationen till ett system av första ordningens ekvationer (dvs på formen $\dot{x} = Ax + bu$ och $y = c^T x$).

(b) Visa att detta ger följande system av ekvationer:

$$\begin{aligned} y &= x_1 + x_3 \\ \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= -3x_1 + x_2 + u \end{aligned}$$

(c) Utgå från ekvationerna i (b) och visa att dessa uppfyller (2).

1.2 Beräkna e^{tA}

3. **(Lösning finnes)** Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

(a) Beräkna e^{tA} med hjälp av diagonaliseringsmetoden (dvs hitta matriserna M, D).

(b) Beräkna e^{tA} med hjälp av Cayley-Hamiltons sats.

(c) Verifiera dina svar genom att använda Matlab.

4. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

(a) Beräkna e^{tA} med hjälp av diagonaliseringsmetoden (dvs hitta matriserna M, D).

(b) Beräkna e^{tA} med hjälp av Cayley-Hamiltons sats.

(c) Verifiera dina svar genom att använda Matlab.

1.3 Lösning av ODE

5. **(Lösning finnes)** Betrakta ODE'n

$$\ddot{y} + 2\dot{y} - 3y = 0$$

med randvillkor $\dot{y}(0) = 0$ och $y(0) = 1$.

(a) Skriv detta som ett system av första ordningens ODE.

(b) Lös systemet i (a)

(c) Betrakta nu istället ODE'n

$$\ddot{y} + 2\dot{y} - 3y = e^{-t}$$

Upprepa del (a) och (b) för denna ODE.

6. **(Lösningsskiss finnes)** Betrakta problemet

$$A\ddot{x} + Bx = 0$$

där

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

och

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

(a) Diagonalisera problemet, dvs hitta P så att $x = Py$ är sådan att $\ddot{y} + Dy = 0$ och D är en diagonalmatris.

(b) Lös det diagonaliserade problemet och bestäm därefter x.

(c) Bestäm den entydiga lösningen om

$$x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} \text{ och } x'(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

7. **(Lösning finnes)** Betrakta problemet

$$A\ddot{x} + Bx = 0$$

där

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

och

$$B = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 7 & -3 & 4 \\ 12 & -8 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Använd Matlab för att lösa följande deluppgifter

(a) Diagonalisera problemet, dvs hitta P så att $x = Py$ är sådan att $\ddot{y} + Dy = 0$ och D är en diagonalmatris.

(b) Lös det diagonaliserade problemet och bestäm därefter x.

(c) Bestäm den entydiga lösningen om

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ och } x'(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1.4 Några lösningar och skissar

Lösning av Övning 1

(a) Enligt ovan gäller att

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

(b) Vi får att $y = c^T x = x_1 + 3x_2$ och

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 - 2x_2 + u \end{bmatrix}$$

vilket ger de sökta ekvationerna.

(c) Vi ser att

$$\begin{aligned} \ddot{y} + 2\dot{y} + y &= \ddot{x}_1 + 3\ddot{x}_2 + 2\dot{x}_1 + 6\dot{x}_2 + x_1 + 3x_2 \\ &= \dot{x}_2 + 3(-\dot{x}_1 - 2\dot{x}_2 + \dot{u}) + 2\dot{x}_1 + 6\dot{x}_2 + x_1 + 3x_2 \\ &= \dot{x}_2 - \dot{x}_1 + 3\dot{u} + x_1 + 3x_2 = -x_1 - 2x_2 + u - x_2 + 3\dot{u} + x_1 + 3x_2 = 3\dot{u} + u, \end{aligned}$$

där vi upprepade gånger använder ekvationerna från (b).

Lösning till Övning 3.

(a) Vi vill skriva $A = MDM^{-1}$ där D är diagonalmatrisen innehållandes egenvärdena till A och M är matrisen som innehåller motsvarande egenvektorer. För att beräkna D observerar vi att

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(5-\lambda) - 12 = \lambda^2 - 6\lambda - 7 = (\lambda+1)(\lambda-7),$$

så att $\lambda_1 = -1$ och $\lambda_2 = 7$. Därför har vi att

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

Vidare har vi att

$$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix},$$

så att $(A - \lambda_1 I)u = 0$ löses av att $2u_1 + 4u_2 = 0$ så att t.ex. $u_1 = 2$ och $u_2 = -1$. Därför är en möjlig egenvektor motsvarande egenvärdet $\lambda_1 = -1$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

På liknande sätt har vi att

$$A - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix},$$

så att $(A - \lambda_2 I)u = 0$ löses av att $-6u_1 + 4u_2 = 0$ så att t.ex. $u_1 = 2$ och $u_2 = 3$. Därför är en möjlig egenvektor motsvarande egenvärdet $\lambda_2 = 7$

$$v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Vi har därför att

$$M = [v_1 \; v_2] = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Vi har vidare att

$$M^{-1} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

så att till slut

$$\begin{aligned} e^{tA} &= Me^{tD}M^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{7t} \end{bmatrix} \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 6e^{-t} + 2e^{7t} & -4e^{-t} + 4e^{7t} \\ -3e^{-t} + 3e^{7t} & 2e^{-t} + 6e^{7t} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(b) Enligt Cayley-Hamiltons sats så har vi att

$$e^{t\lambda_i} = \alpha_0 + \lambda_i \alpha_1 \text{ för } i = 1, 2$$

så att

$$e^{-t} = \alpha_0 - \alpha_1 \text{ och } e^{7t} = \alpha_0 + 7\alpha_1.$$

Dessa ekvatione löses av

$$\alpha_1 = \frac{e^{7t} - e^{-t}}{8} \text{ och } \alpha_0 = \frac{e^{7t} + 7e^{-t}}{8}$$

och sedan har vi att

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \alpha_0 I + \alpha_1 A \\ &= \frac{e^{7t} + 7e^{-t}}{8} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{e^{7t} - e^{-t}}{8} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 6e^{-t} + 2e^{7t} & -4e^{-t} + 4e^{7t} \\ -3e^{-t} + 3e^{7t} & 2e^{-t} + 6e^{7t}, \end{bmatrix} \end{aligned}$$

vilket är samma svar som i (a).

(c) I Matlab skriver vi

```
>> syms t
>> A=[1 4 ; 3 5]
>> expm(t*A)
```

Vilket ger

```
[     (3*exp(-t))/4 + exp(7*t)/4,     exp(7*t)/2 - exp(-t)/2]
[ (3*exp(7*t))/8 - (3*exp(-t))/8, exp(-t)/4 + (3*exp(7*t))/4]
```

och detta är samma som i (a) och (b).

Det är värt att notera att om vi felaktigt skulle använda kommandot 'exp' istället för 'expm' så skulle vi få

```
>> syms t
>> A=[1 4 ; 3 5]
>> exp(t*A)
```

Vilket ger

```
[   exp(t), exp(4*t)]
[ exp(3*t), exp(5*t)].
```

Detta är alltså fel svar.

Lösning till Övning 5.

(a) Låt $x_1 = y$ och $x_2 = \dot{x}_1$. Vi kan då skriva ekvationen som

$$\dot{x}_2 + 2x_2 - 3x_1 = 0 \text{ så att } \dot{x}_2 = 3x_1 - 2x_2,$$

och får att

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ vilket vi skriver som } \dot{x} = Ax$$

(b) Lösningen ges av

$$x = e^{tA}x(0) \text{ där } x(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(0) \\ \dot{y}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dessutom har vi att (OBS, NI FÖRVÄNTAS KUNNA RÄKNA UT DETTA STEG I DETALJ)

$$e^{tA} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} e^{-3t} + 3e^{t} & e^{t} - e^{-3t} \\ 3e^{t} - 3e^{-3t} & 3e^{-3t} + e^{t} \end{bmatrix}$$

så att

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = e^{tA}x(0) = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} e^{-3t}+3e^{t} & e^{t}-e^{-3t} \\ 3e^{t}-3e^{-3t} & 3e^{-3t}+e^{t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} e^{-3t}+3e^{t} \\ 3e^{t}-3e^{-3t} \end{bmatrix}.$$

Vi ser då att

$$y = x_1 = \frac{e^{-3t}+3e^{t}}{4}.$$

(c) Från (a) får vi nu istället

$$\dot{x}_2 + 2x_2 - 3x_1 = e^{-t} \text{ så att } \dot{x}_2 = 3x_1 - 2x_2 + e^{-t},$$

och får att

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-t} \end{bmatrix} \text{ vilket vi skriver som } \dot{x} = Ax+u$$

Lösningen ges av

$$x = e^{tA}x(0) + e^{tA}\int_0^t e^{-sA}u(s)ds \text{ där } x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Vidare blir

$$e^{-sA}u(s) = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} e^{3s}+3e^{-s} & e^{-s}-e^{3s} \\ 3e^{-s}-3e^{3s} & 3e^{3s}+e^{-s} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ e^{-s} \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} e^{-2s}-e^{2s} \\ 3e^{2s}+e^{-2s} \end{bmatrix}$$

så att

$$\int_0^t e^{-sA}u(s)ds = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} -e^{-2s}-e^{2s} \\ 3e^{2s}-e^{-2s} \end{bmatrix}_0^t = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 2-e^{-2t}-e^{2t} \\ 3e^{2t}-e^{-2t}-2 \end{bmatrix}$$

och därmed får vi att

$$\begin{aligned} x &= e^{tA}\left(x(0) + \int_0^t e^{-sA}u(s)ds\right) \\ &= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} e^{-3t}+3e^{t} & e^{t}-e^{-3t} \\ 3e^{t}-3e^{-3t} & 3e^{-3t}+e^{t} \end{bmatrix}\frac{1}{8}\begin{bmatrix} 10-e^{-2t}-e^{2t} \\ 3e^{2t}-e^{-2t}-2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Vi får då att

$$\begin{aligned} y = x_1 &= \frac{1}{32}\big((e^{-3t}+3e^{t})(10-e^{-2t}-e^{2t}) + (e^{t}-e^{-3t})(3e^{2t}-e^{-2t}-2)\big) \\ &= \frac{1}{8}e^{-3t}(3-2e^{2t}+7e^{4t}) = \frac{3e^{-3t}-2e^{-t}+7e^{t}}{8} \end{aligned}$$

Lösningsskiss till Övning 6

(a) Om

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2/3 \\ 3/4 & 1 \end{bmatrix} \text{ och } D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7/4 \end{bmatrix}$$

så gäller att $APD = BP$ och vi får nu systemet

$$\ddot{y} + Dy = 0 \text{ och } x = Py.$$

(b) Det diagonaliserade systemet består nu av ekvationerna

$$\ddot{y}_1 + y_1 = 0 \text{ och } \ddot{y}_2 + \frac{7}{4}y_2 = 0$$

som har lösningarna

$$y_1 = C_1\cos(t) + C_2\sin(t) \text{ och } y_2 = C_3\cos(\sqrt{7/4}t) + C_4\sin(\sqrt{7/4}t)$$

så att

$$x_1(t) = C_1\cos(t) + C_2\sin(t) + \frac{2C_3}{3}\cos(\sqrt{7/4}t) + \frac{2C_4}{3}\sin(\sqrt{7/4}t)$$

och

$$x_2(t) = \frac{3C_1}{4}\cos(t) + \frac{3C_2}{4}\sin(t) + C_3\cos(\sqrt{7/4}t) + C_4\sin(\sqrt{7/4}t).$$

(c) Vårt initialvillkor ger att

$$x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 + 2C_3/3 \\ 3C_1/4 + C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2/3 \\ 3/4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1 \\ C_3 \end{bmatrix}$$

vilket ger $C_1 = 32/3$ och $C_3 = -13$. Sedan kan C_2, C_4 bestämmas på liknande sätt.

Lösning av Övning 7

(a) Vi använder kommandot "[P D]=eig(B,A)" i Matlab och får

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ och } D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) Vi har nu ekvationerna

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 + 2y_1 &= 0 \text{ så att } y_1 = a_1\cos(\sqrt{2}t) + b_1\sin(\sqrt{2}t) \\ \ddot{y}_2 + 3y_2 &= 0 \text{ så att } y_2 = a_2\cos(\sqrt{3}t) + b_2\sin(\sqrt{3}t) \\ \ddot{y}_3 + y_3 &= 0 \text{ så att } y_3 = a_3\cos(t) + b_3\sin(t). \end{aligned}$$

Vi får sedan att $x = Py$ dvs

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y_2 + y_3 \\ y_3 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix}$$

(c) Vi har nu att

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = x(0) = \begin{bmatrix} 2y_2(0) + y_3(0) \\ y_3(0) \\ y_1(0) + y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a_2 + a_3 \\ a_3 \\ a_1 + a_2 \end{bmatrix}$$

vilket ger att $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Vidare är

$$x' = \begin{bmatrix} 2y_2' + y_3' \\ y_3' \\ y_1' + y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{3}b_2 \cos(\sqrt{3}t) + b_3 \cos(t) \\ b_3 \cos(t) \\ \sqrt{2}b_1 \cos(\sqrt{2}t) + \sqrt{3}b_2 \cos(\sqrt{3}t) \end{bmatrix}$$

och

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = x'(0) = \begin{bmatrix} 2\sqrt{3}b_2 + b_3 \\ b_3 \\ \sqrt{2}b_1 + \sqrt{3}b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2\sqrt{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix},$$

vilket ger lösningen

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2\sqrt{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Till slut ser vi då att

$$\begin{aligned} x_1 &= 2y_2 + y_3 = y_3 = \sin(t) \\ x_2 &= y_3 = \sin(t) \\ x_3 &= y_1 + y_2 = y_1 = \frac{\sin(\sqrt{2}t)}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$