Övningar (med vissa lösningar) MVE100 Avsnitt 3 Del 1 (F7-F10)

Erik I. Broman

22 februari 2022

1 Inledning

Följande kommandon i Matlab/Mathematica kan vara bra att känna till (använd hjälpfunktionen i Matlab/Mathematica eller googla för detaljerad info).

(I) *Integrate:* Räknar integraler i Mathematica

(II) *Simplify och FullSimplify:* Förenklar uttryck i Mathematica

(III) *Assumptions -> Element[k, Integers]]* Säger åt Mathematica att k är ett heltal.

1.1 Fourierserier

1. **(Lösning finnes)** Låt

$$f(t) = t^2 \text{ om } 0 \leq t < 2$$
$$f(t+2k) = f(t) \text{ om } k \in \mathbb{Z}.$$

   (a) Bestäm den (komplexa) Fourierserien för $f(t)$.

   (b) Bestäm den trigonometriska Fourierserien för $f(t)$ utan att använda del (a).

   (c) Verifiera dina svar genom att kontrollera att de uppfyller de samband vi härledde på föreläsningen.

2. Låt

$$f(t) = e^t \text{ om } 0 \leq t < 2$$
$$f(t+2k) = f(t) \text{ om } k \in \mathbb{Z}.$$

   (a) Bestäm den (komplexa) Fourierserien för $f(t)$.

(b) Bestäm den trigonometriska Fourierserien för $f(t)$ utan att använda del (a).

(c) Verifiera dina svar genom att kontrollera att de uppfyller de samband vi härledde på föreläsningen.

3. Låt

$$\begin{aligned} f(t) &= e^t + t^2 \text{ om } 0 \le t < 2 \\ f(t+2k) &= f(t) \text{ om } k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

(a) Bestäm den (komplexa) Fourierserien för $f(t)$.

(b) Bestäm den trigonometriska Fourierserien för $f(t)$ utan att använda del (a).

(c) Verifiera dina svar genom att kontrollera att de uppfyller de samband vi härledde på föreläsningen.

Tips: Om du har löst Övningar 1 och 2 så kräver denna uppgift minimalt med arbete.

1.2 Udda/Jämna utökningar

4. Låt $f(t) = t^2$ för $0 \le t < 2$.

(a) Bestäm en sinus-serie för $f(t)$ på intervallet $[0, 2]$.

(b) **(Lösning finnes)** Bestäm en cosinus-serie för $f(t)$ på intervallet $[0, 2]$.

(c) Verifiera dina svar genom att plotta svaren i (a) och (b) över flera perioder.

1.3 Summor och Parsevals formel

5. **(Lösning finnes)** Använd ditt svar från Övning 1 för att visa att

(a)

$$-\frac{1}{3} = \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$$

(b)

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

(c)

$$\frac{16}{5} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \sum_{k \neq 0} \left| \frac{2(1 + jk\pi)}{k^2\pi^2} \right|^2$$

1.4 Approximation och fel

6. Betrakta återigen funktionen från Övning 1. Approximera $f(t)$ med

$$F_N(t) = \frac{4}{3} + \sum_{k=-N, k\neq 0}^{k=N} \frac{2(1+jk\pi)}{k^2\pi^2} e^{jk\pi t}$$

   (a) Hur stort blir felet om $N = 10$?

   (b) Hur litet kan man välja N för att felet skall vara mindre än 10^{-3}?

   (c) Ungefär hur litet kan man välja N för att felet skall vara mindre än 10^{-8}?

1.5 Lösning av ODE mha av Fourierserier

7. Betrakta ODE'n

$$\ddot{x} - \dot{x} + 2x = f(t)$$

   där $f(t)$ är som i Övning 1.

   (a) Bestäm en partikulärlösning till ODE'n i form av en Fourier-serie.

   (b) Plotta resultatet från uppgift (a).

   (c) Betrakta ODE'n för $t > 0$ med begynnelsevillkoren $x(0) = \dot{x}(0) = 0$. Vad blir den fullständiga lösningen?

   Tips: Använd programvara för att lösa denna deluppgiften då den är för svår att lösa för hand.

1.6 Några lösningar

Lösning av Övning 1:

(a) Vi har att

$$
\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \left\{T = 2, \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \pi\right\} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^2 t^2 e^{-jk\pi t}dt = \frac{1}{2}\left[t^2\frac{e^{-jk\pi t}}{-jk\pi}\right]_0^2 + \frac{1}{jk\pi}\int_0^2 te^{-jk\pi t}dt \\
&= \frac{2}{-jk\pi} + \frac{1}{jk\pi}\left(\left[t\frac{e^{-jk\pi t}}{-jk\pi}\right]_0^2 + \frac{1}{jk\pi}\int_0^2 e^{-jk\pi t}dt\right) \\
&= \frac{2}{-jk\pi} + \frac{2}{k^2\pi^2} = \frac{2(1+jk\pi)}{k^2\pi^2}
\end{aligned}
$$

Om istället $k = 0$ gäller att

$$c_0 = \frac{1}{2}\int_0^2 t^2 dt = \left[\frac{t^3}{6}\right]_0^2 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}.$$

Därför blir

$$f(t) \sim \frac{4}{3} + \sum_{k\neq 0} \frac{2(1+jk\pi)}{k^2\pi^2}e^{jk\pi t}.$$

RIMLIGTVIS KOLLAR MAN SITT SVAR I MATLAB/MATHEMATICA!!!

```
FullSimplify[Integrate[t^2*Exp[-k I Pi t]/2, {t, 0, 2}],
 Assumptions -> Element[k, Integers]]
```

ger c_k i MATHEMATICA.

Vidare kan vi använda MATLAB:

```
function FseriesU1(N)

t=-4:0.01:4;

sum=4/3*ones(size(t));

for n=1:N

    sum=sum+2*(1+j*n*pi)/(n^2*pi^2)*exp(j*n*pi*t)...
        +2*(1-j*n*pi)/(n^2*pi^2)*exp(-j*n*pi*t);

end

plot(t,sum,t,t.^2)
```

(b) Vi har att

$$a_k = \int_0^2 t^2 \cos(k\pi t)dt = \cdots = \frac{4}{k^2\pi^2}$$

för $k \neq 0$ och $a_0 = \int_0^2 t^2 dt = 8/3$. Vidare är

$$b_k = \int_0^2 t^2 \sin(k\pi t)dt = \cdots = -\frac{4}{k\pi}$$

så att

$$\begin{aligned} f(t) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\pi t) + b_k \sin(k\pi t) \qquad (1) \\ &= \frac{4}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2\pi^2} \cos(k\pi t) - \frac{4}{k\pi} \sin(k\pi t) \end{aligned}$$

BÖR JU KOLLAS MED MATLAB SÅ KLART.

(c) Enligt föreläsningen så är

$$a_k = 2Re[c_k] = 2Re\left[\frac{2(1+jk\pi)}{k^2\pi^2}\right] = \frac{4}{k^2\pi^2},$$

$a_0 = 2Re[c_0] = 8/3$ och

$$b_k = -2Im[c_k] = 2Re\left[\frac{2(1+jk\pi)}{k^2\pi^2}\right] = -\frac{4k\pi}{k^2\pi^2} = -\frac{4}{k\pi},$$

precis som vi hade räknat ut.

Lösning av Övning 4 del (b)**:**

(b) Vi gör en jämn utökning och betraktar

$$\begin{aligned} \phi(t) &= t^2 \text{ för } -2 \leq t < 2 \\ \phi(t+4k) &= \phi(t) \text{ för } k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Då vi har en jämn funktion kollar vi på (här blir $\omega_0 = 2\pi/T = \pi/2$)

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(k\omega_0 t)dt = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} t^2 \cos\left(\frac{k\pi t}{2}\right)dt = \cdots = \frac{16(-1)^k}{k^2\pi^2},$$

och $a_0 = \frac{2}{4}\int_{-2}^{2} t^2 dt = 8/3$ så att

$$f(t) \sim \frac{4}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16(-1)^k}{k^2\pi^2}\cos\left(\frac{k\pi t}{2}\right)$$

Lösning av Övning 5 del (a)

(a) Det gäller att $f(t)$ sammanfaller med sin Fourier-serie i alla kontinuitetspunkter. Vi ser från uttrycket (1) att om vi evaluerar detta i punkten $t = 1$ så försvinner sinus-delen och $\cos(k\pi) = (-1)^k$, dvs

$$1 = f(1) = \frac{4}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{k^2\pi^2},$$

så att

$$-\frac{1}{3} = \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}.$$

Detta kan vi enkelt kontrollera med MATLAB:

```
k=1:100; terms=4/pi^2.*(-1).^k./(k.^2); sum(terms)
```

som spottar ur sig svaret -0.333333.

Lösning av Övning 6.

(a) Felet definieras av

$$\frac{1}{T}\int_0^T |f(t) - F_N(t)|^2\, dt = \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2\, dt - \sum_{k=-N}^{N} |c_k|^2.$$

Här är

$$|c_k|^2 = \left|\frac{2(1 + jk\pi)}{k^2\pi^2}\right|^2.$$

Vi beräknar först

$$\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2\, dt = \frac{1}{2}\int_0^2 \left|t^2\right|^2 dt = \frac{1}{2}\int_0^2 t^4 dt = \left[\frac{t^5}{10}\right]_0^2 = \frac{32}{10} = \frac{16}{5}.$$

Vi använder sedan MATLAB:

```
N=10;
k=1:N; terms=(abs(2*(1+j*k*pi)./(k.^2*pi^2))).^2; (4/3)^2+2*sum(terms);
```

som spottar ur sig svaret 0.0772.

(b) 811 verkar det bli här (stort!).

(c) 8106 verkar det bli här (stort!).

Kommentar: Anledningen till att felet är så stort beror med största sannolikhet på att diskontinuiteten ställer till det. Gibbs fenomen helt enkelt!

Lösning av Övning 7.

(a) Vi kan inte anta att lösningen är reell, så vi använder oss av den komplexa serie-utvecklingen. Dvs vi låter

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{c}_k e^{jk\pi t}.$$

Vi får då att

$$\dot{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{c}_k jk\pi e^{jk\pi t} \text{ och att } \ddot{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{c}_k (jk\pi)^2 e^{jk\pi t}.$$

Därmed blir

$$\ddot{x} - \dot{x} + 2x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{c}_k \left((jk\pi)^2 - jk\pi + 2\right) e^{jk\pi t},$$

och då vi har från Övning 1 att

$$f(t) \sim \frac{4}{3} + \sum_{k \neq 0} \frac{2(1+jk\pi)}{k^2\pi^2} e^{jk\pi t}$$

så ser vi att om vi matchar koefficienterna så får vi att

$$\tilde{c}_k = \begin{cases} \frac{2}{3} & \text{om } k = 0 \\ \frac{2(1+jk\pi)}{k^2\pi^2((jk\pi)^2 - jk\pi + 2)} & \text{om } k \neq 0, \end{cases}$$

så att

$$x_p(t) = \frac{2}{3} + \sum_{k \neq 0} \frac{2(1+jk\pi)}{k^2\pi^2((jk\pi)^2 - jk\pi + 2)} e^{jk\pi t}.$$

(b) Följande kodsnutt kan användas för att plotta

```
function FseriesU7b(N,width)

t=-width:0.01:width;

sum=2*ones(size(t))/3;

for k=1:N

    sum=sum+2*(1+j*k*pi)/(k^2*pi^2*((j*k*pi)^2-j*k*pi+2))*exp(j*k*pi*t);
         %positiva k

    sum=sum+2*(1-j*k*pi)/(k^2*pi^2*((-j*k*pi)^2+j*k*pi+2))*exp(-j*k*pi*t);
```

```
        %negativa k
end
close all
figure
plot(t,sum)
```

(c) Betrakta nu den homogena ekvationen

$$\ddot{x} - \dot{x} + 2x = 0.$$

Denna kan lösas på klassiskt vis vilket ger homogenlösningen

$$x_h(t) = C_1 e^{t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{7}t}{2}\right) + C_2 e^{t/2} \sin\left(\frac{\sqrt{7}t}{2}\right).$$

OBS: Observera att ifall vi felaktigt skulle använda begynnelsevillkoren redan här så skulle vi få att $x_h(t) = 0$ för alla t. Detta är fel då det är hela lösningen $x_p(t) + x_h(t)$ som skall uppfylla begynnelsevillkoren, inte $x_p(t)$ och $x_h(t)$ var för sig!

För att bestämma konstanterna C_1, C_2 så observerar vi att

$$x_h(0) = C_1 \text{ och att } \dot{x}_h(0) = \frac{C_1}{2} + \frac{\sqrt{7}C_2}{2}$$

medans

$$x_p(0) = \frac{2}{3} + \sum_{k\neq 0} \frac{2(1+jk\pi)}{k^2\pi^2((jk\pi)^2 - jk\pi + 2)} (\approx 0.55948)$$

och

$$\dot{x}_p(0) = \sum_{k\neq 0} \frac{2(1+jk\pi)jk\pi}{k^2\pi^2((jk\pi)^2 - jk\pi + 2)} (\approx -0.643774).$$

Från villkoret $x_p(0) + x_h(0) = 0$ får vi ekvationen

$$C_1 + x_p(0) = 0,$$

medans villkoret $\dot{x}_p(0) + \dot{x}_h(0) = 0$ ger ekvationen

$$\frac{C_1}{2} + \frac{\sqrt{7}C_2}{2} + \dot{x}_p(0) = 0.$$

Vi finner att detta ger lösningarna

$$C_1 \approx -0.5595 \text{ och } C_2 = \frac{-2\dot{x}_p(0) - C_1}{\sqrt{7}} \approx -0.2752.$$

Den fullständiga lösningen blir alltså

$$\begin{aligned} x(t) &= x_h(t) + x_p(t) \\ &= C_1 e^{t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{7}t}{2}\right) + C_2 e^{t/2} \sin\left(\frac{\sqrt{7}t}{2}\right) \\ &\qquad + \frac{2}{3} + \sum_{k \neq 0} \frac{2(1 + jk\pi)}{k^2\pi^2((jk\pi)^2 - jk\pi + 2)} e^{jk\pi t}, \end{aligned}$$

med C_1 och C_2 som ovan.

Om man vill kontrollera sitt svar kan man med fördel plotta upp summan i Matlab (på samma sätt som vi gjorde i (b)) och jämföra med svaret om man använder dsolve. Koden för det senare kan skrivas på följande vis:

```
function FseriesU7_dsolve(N,length)

close all

syms x(t) f(t)

f(t)=t^2*(heaviside(t)-heaviside(t-2));

for n=1:N

    f(t)=f(t)+(t-2*n)^2*(heaviside(t-2*n)-heaviside(t-2*(n+1)));
    %positive t

    f(t)=f(t)+(t+2*n)^2*(heaviside(t+2*n)-heaviside(t+2*(n-1)));
    %negative t

end

ezplot(f,[-length,length]) %This checks that the function f(t) is
                           %as we want it to be

figure
Dx(t)=diff(x(t));
D2x(t)=diff(x(t),2);
y=dsolve(D2x-Dx+2*x==f(t),x(0)==0,Dx(0)==0);
```

```
ezplot(y,[-length,length])
axis([-length,length,-8,4])
title('x med dsolve')
```