

Övningar (med vissa lösningar) MVE100 Avsnitt 2 (F4-F6)

Erik I. Broman

3 februari 2021

1 Inledning

Följande kommandon i Matlab/Mathematica kan vara bra att känna till (använd hjälpfunktionen i Matlab/Mathematica eller googla för detaljerad info).

- (I) *laplace*: Laplacetransformerar uttrycket som följer. Testa att skriva *syms t* följt av *laplace(cos(t))* i MATLAB.
- (II) *ilaplace*: Inversa Laplacetransformen. Testa att skriva *syms s* följt av *ilaplace(s/(s² + 1))* i MATLAB.
- (III) Kommandot *DSolve* i Mathematica är bra för att lösa ODE.

1.1 Styckade funktioner, Heaviside och Dirac-delta

1. Låt

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{om } t < 0 \\ t & \text{om } 0 \leq t < 1 \\ t^2 & \text{om } 1 \leq t \end{cases}$$

- (a) Skriv $f(t)$ på en enda rad mha (Heaviside-funktioner).
- (b) Laplace-transformera $f(t)$.

2. Beräkna följande integraler

(a)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{t^2} \cos(2t)(t+1)\delta(t)dt.$$

(b)

$$\int_1^{\infty} e^{t^2} \cos(2t)(t+1)\delta(t)dt.$$

(c)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin(\pi(t+3)/2)(t-2)\delta(t+2)dt.$$

(d)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|}(t-2)(\delta(t) + \delta(t+2))dt.$$

(e)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |t|^{-2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t+k)dt.$$

1.2 Laplace och ODE

3. **(Lösning finnes)** Betrakta återigen (som i Övning 5 i Avsnitt 1) ODE'n

$$\ddot{y} + 2\dot{y} - 3y = 0$$

med randvillkor $\dot{y}(0) = 0$ och $y(0) = 1$.

- (a) Laplacetransformera ekvationen ovan och lös ut $Y(s)$.
- (b) Inverstransformera (mha tabell) och hitta $y(t)$.
- (c) Betrakta nu istället ODE'n

$$\ddot{y} + 2\dot{y} - 3y = e^{-t}$$

Upprepa del (a) och (b) för denna ODE.

4. Betrakta följande ekvationssystem

$$\dot{x}_1 = 2x_1 - x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + 3x_2$$

med begynnelsevillkoret $x_1(0) = 1$ och $x_2(0) = 2$.

- (a) Använd Laplacetransform och bestäm $X(s)$.
- (b) Inverstransformera $X(s)$ och bestäm $x(t)$.

5. Betrakta följande ekvationssystem

$$\dot{x}_1 = 2x_1 - x_2 + \delta(t)$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + 3x_2$$

med begynnelsevillkoret $x_1(0) = 0$ och $x_2(0) = 0$.

- (a) Använd Laplacetransform och bestäm $X(s)$.
- (b) Inverstransformera $X(s)$ och bestäm $x(t)$.

1.3 LTI

6. **(Lösning finnes)** Betrakta ett LTI-system beskrivet av ekvationen

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + x = \cos(t).$$

med begynnelsevillkoret $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$.

- (a) Hitta överföringsfunktionen för systemet.
 - (b) Är systemet stabilt?
 - (c) Ange impulssvaret.
 - (d) Uttryck lösningen med hjälp av faltningsformeln.
 - (e) Kontrollera ditt resultat med Matlab eller Mathematica.
7. Gör om uppgift 6 fast med $\ddot{x} + 2\dot{x} + x$ utbytt mot $\ddot{x} - 2\dot{x} + x$. Vad förändras?

1.4 Laplacetransform av Periodiska funktioner

8. Bestäm Laplacetransformen av "sågtandsfunktionen" dvs

$$u(t) = \begin{cases} t & \text{för } 0 \leq t < 1 \\ t - k & \text{för } k \leq t < k + 1, k \in \mathbb{N}^+. \end{cases}$$

9. **(Lösning finnes)**

- (a) Bestäm Laplace-transformen av $\cos(t)$
- (b) Använd resultatet i (a) för att lösa ekvationen i Övning 6.

2 Lösningar

Lösning till Övning 3:

(a) Vi har att

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{L}\{\ddot{y} + 2\dot{y} - 3y\} \\ &= s^2 Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) + 2(sY(s) - y(0)) - 3Y(s) = Y(s)(s^2 + 2s - 3) - s - 2, \end{aligned}$$

så att

$$Y(s) = \frac{s+2}{s^2+2s-3}.$$

(b) Vi använder partialbråksuppdelning för att se att

$$Y(s) = \frac{3}{4(s-1)} + \frac{1}{4(s+3)},$$

från vilket följer att

$$y(t) = \frac{3}{4}e^t + \frac{1}{4}e^{-3t} = \frac{e^{-3t} + 3e^t}{4}$$

precis som i Övning 5 Avsnitt 1.

(c) Laplacetransformen av e^{-t} är $1/(s+1)$ så att transformen av ODE'n blir

$$\frac{1}{s+1} = Y(s)(s^2 + 2s - 3) - s - 2,$$

så att

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{s+2}{s^2+2s-3} + \frac{1}{(s+1)(s^2+2s-3)} \\ &= \frac{7}{8(s-1)} - \frac{1}{4(s+1)} + \frac{3}{8(s+3)}. \end{aligned}$$

Därför blir

$$y(t) = \frac{1}{8} (7e^t - 2e^{-t} + 3e^{-3t})$$

precis som i Övning 5 Avsnitt 1.

Lösning till Övning 6.

(a) Man får fram överföringsfunktionen genom att ersätta högerledet med $u(t)$ och hitta $G(s) = X(s)/U(s)$. Vi får då

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + x = u(t).$$

Denna transform är

$$s^2 X(s) - sx(0) - \dot{x}(0) + 2(sX(s) - x(0)) + X(s) = (s^2 + 2s + 1)X(s) = U(s)$$

så att

$$G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + 2s + 1} = \frac{1}{(s+1)^2}.$$

(b) Systemet har en dubbelpol i $s = -1$. Då dessa ligger i vänstra halvplanet så är systemet stabilt.

(c) Impulssvaret ges av

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\} = te^{-t}H(t)$$

(d) Vi får att $x(t) = (g * u)(t)$ där alltså $g(t) = te^{-t}H(t)$ och $u(t) = \cos(t)H(t)$. Observera att även $u(t)$ är "utrustad" med en Heaviside-funktion. Vi får att

$$\begin{aligned} x(t) &= (g * u)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)u(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \tau e^{-\tau}H(\tau)\cos(t-\tau)H(t-\tau)d\tau = \int_0^t \tau e^{-\tau}\cos(t-\tau)d\tau. \end{aligned}$$

(e) Om vi använder Mathematica så har vi dels att

```
DSolve[{x'[t] + 2 x[t] == Cos[t]*HeavisideTheta[t],
  x[0] == 0, x'[0] == 0}, {x[t]}, {t, 0, Infinity}]
```

ger svaret

```
{{x[t] -> 1/2 (-e^-t t + Sin[t])}}
```

och vidare så ger även

```
Integrate[s*Exp[-s]*Cos[t - s], {s, 0, t}]
```

svaret

```
1/2 (-e^-t t + Sin[t])
```

så allt verkar OK!

Lösning av Övning 9:

(a) Vi använder oss av resultatet från föreläsningen som sa att Laplace-transformen av en periodisk funktion $u(t)$ ges av

$$\mathcal{L}(u) = \int_0^{\infty} u(t)e^{-st}dt = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T u(t)e^{-st}dt,$$

där T är periodlängden som i detta fall är 2π . Vi ser då att

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \cos(t)e^{-st} dt &= [\sin(t)e^{-st}]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin(t)(-se^{-st}) dt \\ &= 0 + s \int_0^{2\pi} \sin(t)e^{-st} dt = [-s \cos(t)e^{-st}]_0^{2\pi} - s \int_0^{2\pi} (-\cos(t))(-se^{-st}) dt \\ &= -se^{-2\pi s} + s - s^2 \int_0^{2\pi} \cos(t)e^{-st} dt,\end{aligned}$$

så att

$$\int_0^{2\pi} \cos(t)e^{-st} dt = \frac{s(1 - e^{-2\pi s})}{1 + s^2}.$$

Vi får då att

$$\mathcal{L}(\cos(t)) = \frac{1}{1 - e^{-2\pi s}} \int_0^{2\pi} \cos(t)e^{-st} dt = \frac{s}{1 + s^2}.$$

(b) Om vi nu Laplace-transformerar ekvationen i Övning 6 får vi

$$(s^2 + 2s + 1)X(s) = \frac{s}{1 + s^2} \text{ så att } X(s) = \frac{s}{(1 + s^2)(1 + s)^2}.$$

Ingen vettig människa är sugen på att partialbråksuppdelna men vi måste ändå göra det. Här kan man använda sig av Mathematica som hjälpmedel:

```
Apart[s/((s + 1)^2*(1 + s^2))]
```

ger

$$-(1/(2(1 + s)^2)) + 1/(2(1 + s^2)).$$

Om man nu befinner sig i en situation där man har tillgång till Mathematica men att fullständiga redovisningar krävs då kan man INTE skriva

$$\frac{s}{(s + 1)^2(1 + s^2)} = \frac{1}{2(1 + s^2)} - \frac{1}{2(1 + s)^2}$$

enligt Mathematica” och förvänta sig full poäng. Hur gör man då? Man kommer ihåg mantrat “verifiera är lättare än att lösa” och skriver: “Vi ser att

$$\begin{aligned}\frac{1}{2(1 + s^2)} - \frac{1}{2(1 + s)^2} \\ = \frac{(1 + s)^2 - (1 + s^2)}{2(1 + s^2)(1 + s)^2} = \frac{1 + s^2 + 2s - 1 - s^2}{2(1 + s^2)(1 + s)^2} = \frac{s}{(s + 1)^2(1 + s^2)}.\end{aligned}$$

Efter detta använder vi bara en standardtabell för Laplacetransformer för att se att

$$\begin{aligned}x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2(1+s^2)}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2(1+s)^2}\right\} \\&= \frac{\sin(t)}{2} - \frac{te^{-t}}{2} = \frac{\sin(t) - te^{-t}}{2}\end{aligned}$$

där vi använde förskjutningsregeln och det faktum att $\mathcal{L}^{-1}\{1/s^2\} = t$.