

Övningar (med vissa lösningar) MVE100 Avsnitt 4 (F12-F14)

Erik I. Broman

3 februari 2021

1 Inledning

Denna gång finns inga nya Matlab/Mathematica kommandon jag kommer på.

1.1 Variabelseparation

1. Betrakta följande partiella differentialekvationer:

- (a) $y u_{xx} + u_y = 0$
- (b) **(Lösning finnes)** $x^2 u_{xx} + x u_x + u_{yy} + u = 0$
- (c) $u_{xx} + u_{xy} + u_{yy} = 0$
- (d) $u_{xx} + u_{xy} + u_y = 0$

För alla dessa deluppgifter, genomför en variabelseparation och härled ett par av ordinära differentialekvationer, alternativt visa att detta inte är möjligt.

2. Använd metoderna från föreläsningen för att lösa den partiella differentialekvationen $u_{tt} = 9u_{xx}$ med randvillkor

$$u(0, t) = u(1, t) = 0$$

och begynnelsevillkor

$$u(x, 0) = 2 \sin(\pi x) - 3 \sin(4\pi x) \text{ och } u_t(x, 0) = 0 \text{ för } 0 < x < 1.$$

3. **(Lösning finnes)**

- (a) Använd metoderna från föreläsningen för att lösa den partiella differentialekvationen $u_t = \frac{1}{10} u_{xx}$ med randvillkor

$$u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0$$

och begynnelsevillkor

$$u(x, 0) = 3 - 4 \cos(2x) \text{ för } 0 < x < \pi.$$

(b) Bestäm ett värde t_0 så att $|u(x, t) - 3| < 10^{-4}$ för $t > t_0$.

4. **(Lösning finnes)** Enligt föreläsningarna så har värmeledningsekvationen

$$u_t = u_{xx}$$

med randvillkor $u(0, t) = u(1, t) = 0$ och begynnelsevillkoret $u(x, 0) = f(x)$ lösningen

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x) e^{-n^2 \pi^2 t}.$$

Utgå ifrån detta och lös problemet

$$u_t = u_{xx} + R$$

med randvillkor $u(0, t) = u(1, t) = 0$ och begynnelsevillkoret $u(x, 0) = 0$. Här är $R > 0$ och reflekterar det faktum att staven är gjord av ett radioaktivt material och därför genererar värme.

Tips: Använd teknikerna från Föreläsning 13, första delen. I detta fall måste ni expandera R i en sinus-serie vilket i sin tur kräver att ni gör en udda utökning (se föreläsning 7). Kontrollera detta steg med hjälp av Matlab!

5. Betrakta den partiella differentialekvationen

$$u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

med bivillkor

$$u(0, y) = u(1, y) = u(x, 0) = 0.$$

Bestäm alla lösningar $u_n(x, y)$.

6. **(Lösning finnes)** (Detta är tal 18c i häftet): Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till följande problem:

$$-y'' = \lambda y$$

med randvillkor

$$y(0) = y(1) \text{ och } y'(0) = y'(1).$$

1.2 Lösningar

Lösning av Övning 1b:

(b) Vi ansätter $u(x, y) = X(x)Y(y)$ och får att

$$\begin{aligned} x^2 u_{xx} + x u_x + u_{yy} + u \\ = x^2 X''(x)Y(y) + x X'(x)Y(y) + X(x)Y''(y) + X(x)Y(y) = 0, \end{aligned}$$

vilket vi kan skriva som

$$Y(y)(x^2 X''(x) + x X'(x) + X(x)) = -X(x)Y''(y)$$

eller om vi så vill

$$\frac{x^2 X''(x) + x X'(x) + X(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = c.$$

Detta ger oss

$$x^2 X''(x) + x X'(x) + (1 - c)X(x) \text{ och } Y''(y) = -cY(y),$$

alternativt

$$x^2 X''(x) + x X'(x) + cX(x) \text{ och } Y''(y) = -(1 + c)Y(y).$$

Lösning av Övning 3

(a) Detta har vi gått igenom på föreläsning 13. PDE'n leder till problemen

$$X''(x) = -\lambda X(x) \text{ med } X(0) = X(\pi) = 0$$

och

$$T'(t) = -\lambda \frac{1}{10} T(t).$$

Vi börjar med lösningarna till X-ODE och börjar med negativa värden på $\lambda < 0$:

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

och $X'(x) = c_1 \sqrt{-\lambda} e^{\sqrt{-\lambda}x} - c_2 \sqrt{-\lambda} e^{-\sqrt{-\lambda}x}$ så att

$$c_1 - c_2 = X'(0) = 0 \text{ och } c_1 \sqrt{-\lambda} e^{\sqrt{-\lambda}\pi} - c_2 \sqrt{-\lambda} e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} = X'(\pi) = 0$$

vars enda lösning är $c_1 = c_2 = 0$.

För $\lambda = 0$ har vi lösningen $X(x) = c_1 x + c_2$ så att $X'(x) = c_1$ och våra randvillkor ger då $X'(0) = c_1 = 0$. Här har vi alltså lösningen $X(x) = c$.

För $\lambda > 0$ får vi

$$X(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x).$$

Våra randvillkor blir

$$u_x(0, t) = X'(0)T(t) = u_x(\pi, t) = X'(\pi)T(t) = 0 \text{ så att } X'(0) = X'(\pi) = 0,$$

och $X'(x) = -c_1\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}x) + c_2\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}x)$. Vi får då att

$$X'(0) = c_2 = 0 \text{ och } X'(\pi) = -c_1\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0,$$

så att $\sqrt{\lambda} = n$ eller $\lambda = n^2$ för $n = 1, 2, \dots$ och

$$X_n(x) = c_n \cos(nx).$$

Vi får också att lösningen till T-ODE blir

$$T_n(t) = a_n e^{-n^2 t/10}$$

så att (om vi tar med fallet $\lambda = 0$, dvs $n = 0$)

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(nx) e^{-n^2 t/10}.$$

Vi måste nu kolla begynnelsevillkoret och ser då att

$$\begin{aligned} 3 - 4 \cos(2x) &= u(x, 0) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(nx) e^{-n^2 0/10} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(nx) \end{aligned}$$

och vi ser då att $c_0 = 3$ och $c_2 = -4$ så att den allmänna lösningen blir

$$u(x, t) = 3 - 4 \cos(2x) e^{-2^2 t/10} = 3 - 4 \cos(2x) e^{-2t/5}.$$

Det är alltid en bra ide att kolla om detta stämmer. Vi har att

$$u_t = \frac{8}{5} \cos(2x) e^{-2t/5}$$

och att

$$\frac{1}{10} u_{xx} = \frac{-4e^{-2t/5}(-4 \cos(2x))}{10} = \frac{8}{5} \cos(2x) e^{-2t/5}$$

så det stämmer ju!

(b) Vi har nu att

$$|u(x, t) - 3| = |4 \cos(2x) e^{-2t/5}| \leq 4e^{-2t/5} < 10^{-4},$$

så att vi väljer t_0 så att

$$e^{-2t_0/5} = \frac{1}{40000} \text{ så att } t_0 = \frac{5}{2} \log(40000).$$

Lösning av Övning 4: Vi börjar med att expandera funktionen R (som råkar vara en konstant) i samma typ av serie som vi hittar lösningen $u(x, t)$, dvs en sinus-serie. Vi vill alltså skriva

$$R = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin(n\pi x).$$

Funktionen R är jämn, men en sinusserie motsvarar en udda funktion. Vi måste därför göra en udda utveckling och betraktar därför

$$\phi_R(x) = \begin{cases} R & \text{för } 0 < x < 1 \\ -R & \text{för } -1 < x < 0. \end{cases}$$

(eller snarare en periodisk upprepning av den). Vi har då att

$$\begin{aligned} d_n &= \frac{2}{T} \int_{-1}^1 \phi_R(x) \sin(n\pi x) dx = 2R \int_0^1 \sin(n\pi x) dx \\ &= 2 \left[\frac{-\cos(n\pi x)}{n\pi} \right]_0^1 = \frac{2R}{n\pi} (1 - (-1)^n) = \begin{cases} \frac{4R}{n\pi} & \text{om } n = 1, 3, \dots \\ 0 & \text{annars.} \end{cases} \end{aligned}$$

Vi ansätter sedan partikulärlösningen

$$u_p(x, t) = \sum_{n=1,3,\dots} u_n(t) \sin(n\pi x)$$

och om vi sätter in detta i ekvationen får vi

$$u_t - u_{xx} = \sum_{n=1,3,\dots} (u'_n(t) + n^2 \pi^2 u_n(t)) \sin(n\pi x) = \sum_{n=1,3,\dots} \frac{4R}{n\pi} \sin(n\pi x).$$

Detta ger oss ekvationerna $u'_n(t) + n^2 \pi^2 u_n(t) = \frac{4R}{n\pi}$ för udda n som löses av

$$u_n(t) = \frac{4R}{n^3 \pi^3} + C_n e^{-n^2 \pi^2 t}. \quad (1)$$

Om vi nu lägger ihop homogenlösningen och partikulärlösningen så får vi

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u_h(x, t) + u_p(x, t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x) e^{-n^2 \pi^2 t} + \sum_{n=1,3,\dots} u_n(t) \sin(n\pi x), \end{aligned} \quad (2)$$

där $u_n(t)$ är som i (1).

OBS: Det är ett vanligt fel att man använder sig av begynnelsevillkoren innan man har summerat homogen- och partikulär- lösningarna. Detta kan ge ett felaktigt svar.

För att begynnelsevillkoret skall vara uppfyllt ser vi att

$$0 = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x) + \sum_{n=1,3,\dots} \left(\frac{4R}{n^3\pi^3} + C_n \right) \sin(n\pi x),$$

och för att detta skall vara korrekt måste vi ha att

$$b_n = \begin{cases} -\frac{4R}{n^3\pi^3} - C_n & \text{om } n = 1, 3, \dots \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

Vi använder nu återigen (1) och med detta insatt i (2) får vi till slut

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x) e^{-n^2\pi^2 t} + \sum_{n=1,3,\dots} u_n(t) \sin(n\pi x) \\ &= \sum_{n=1,3,\dots} \left(\frac{4R}{n^3\pi^3} + (b_n + C_n) e^{-n^2\pi^2 t} \right) \sin(n\pi x) \\ &= \sum_{n=1,3,\dots} \frac{4R}{n^3\pi^3} \left(1 - e^{-n^2\pi^2 t} \right) \sin(n\pi x), \end{aligned}$$

vilket blir vårt svar.

Lösning av Övning 6: Vi betraktar ekvationen $-y'' = \lambda y$ och som vanligt delar vi upp i tre fall:

Fall 1 ($\lambda < 0$): Vi har här den allmänna lösningen

$$y(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x} \text{ så att } y'(x) = \sqrt{-\lambda}c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} - \sqrt{-\lambda}c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

Våra första randvillkor ger då

$$y(0) = c_1 + c_2 = y(1) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}}$$

så att

$$c_1 = c_2 \frac{e^{-\sqrt{-\lambda}} - 1}{e^{\sqrt{-\lambda}} - 1}. \quad (3)$$

Vårt andra randvillkor ger oss

$$y'(0) = \sqrt{-\lambda}c_1 - \sqrt{-\lambda}c_2 = y'(1) = \sqrt{-\lambda}c_1 e^{\sqrt{-\lambda}} - \sqrt{-\lambda}c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}}$$

eller efter division med $\sqrt{-\lambda}$

$$c_1 - c_2 = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}} - c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}}$$

så att

$$c_1 = c_2 \frac{e^{-\sqrt{-\lambda}} + 1}{e^{\sqrt{-\lambda}} + 1}.$$

Kombinerat med (3) ser vi att den enda möjliga lösningen är $c_1 = c_2 = 0$.

Fall 2 ($\lambda = 0$): Vi har nu $y''(x) = 0$ vilket har lösningen

$$y(x) = c_1 x + c_2.$$

Vårt första randvillkor ger

$$y(0) = c_2 = y(1) = c_1 + c_2$$

så att $c_1 = 0$. Vi kan också se att $y(x) = c_2$ uppfyller det andra randvillkoret. Vi ser därför att

$$y_0(x) = c \text{ där } c \neq 0$$

(kom ihåg att vi enbart är ute efter nollskilda lösningar) är en egenfunktion motsvarande egenvärdet $\lambda_0 = 0$.

Fall 3 ($\lambda > 0$): Precis som i Fall 1 har vi här den allmänna lösningen

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x} = c_1 e^{i\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-i\sqrt{\lambda}x} \\ &= c_1 (\cos(\sqrt{\lambda}x) + i \sin(\sqrt{\lambda}x)) + c_2 (\cos(\sqrt{\lambda}x) - i \sin(\sqrt{\lambda}x)) \\ &= (c_1 + c_2) \cos(\sqrt{\lambda}x) + i(c_1 - c_2) \sin(\sqrt{\lambda}x) = a \cos(\sqrt{\lambda}x) + b \sin(\sqrt{\lambda}x). \end{aligned}$$

(Räkningen ovan brukar vi hoppa över i denna kurs och direkt konstatera att $y(x) = a \cos(\sqrt{\lambda}x) + b \sin(\sqrt{\lambda}x)$. Jag ville dock demonstrera den en gång.) Vi får sedan att

$$y'(x) = -a\sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}x) + b\sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}x)$$

Vårt första randvillkor ger då

$$y(0) = a = y(1) = a \cos(\sqrt{\lambda}) + b \sin(\sqrt{\lambda}), \quad (4)$$

medans vårt andra ger att

$$y'(0) = b\sqrt{\lambda} = y'(1) = -a\sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}) + b\sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda})$$

och efter division med $\sqrt{\lambda}$ får vi

$$b = b \cos(\sqrt{\lambda}) - a \sin(\sqrt{\lambda}). \quad (5)$$

Vi kan se direkt att $\sqrt{\lambda} = n\pi$ för $n = 1, 2, \dots$ uppfyller (4) och (5) ty då blir sinus-delen noll medans cosinus-delen blir 1. Det skulle dock kunna finnas

fler lösningar, och vi måste därför vara lite mer noggranna. Vi observerar först att från (4) så har vi att

$$b = a \frac{1 - \cos(\sqrt{\lambda})}{\sin(\sqrt{\lambda})},$$

medans (5) ger att

$$b = -a \frac{\sin(\sqrt{\lambda})}{1 - \cos(\sqrt{\lambda})}.$$

Om vi sätter ihop dessa ser vi att vi måste ha att

$$\frac{1 - \cos(\sqrt{\lambda})}{\sin(\sqrt{\lambda})} = -\frac{\sin(\sqrt{\lambda})}{1 - \cos(\sqrt{\lambda})} \Rightarrow \left(1 - \cos(\sqrt{\lambda})\right)^2 = -\sin^2(\sqrt{\lambda}).$$

Utveckling av kvadraten ger då att

$$1 - 2\cos(\sqrt{\lambda}) = -\sin^2(\sqrt{\lambda}) - \cos^2(\sqrt{\lambda}) = -1,$$

så att

$$\cos(\sqrt{\lambda}) = 1 \text{ så att } \sqrt{\lambda} = n\pi,$$

för $n = 1, 2, \dots$. I Fall 3 hittar vi alltså egenfunktionerna

$$y_n(x) = a_n \cos(n\pi x) + b_n \sin(n\pi x)$$

med tillhörande egenvärden $\lambda_n = (n\pi)^2$ för $n = 1, 2, \dots$.

Vi kan sammanfatta svaret på följande sätt:

(I) Egenfunktionen $y_0(x) = c$ där $c \neq 0$ motsvarar egenvärdet $\lambda_0 = 0$.

(II) Egenfunktionerna

$$y_n(x) = a_n \cos(n\pi x) + b_n \sin(n\pi x)$$

där inte både $a_n = 0$ och $b_n = 0$ motsvarar egenvärdena $\lambda_n = (n\pi)^2$ för $n = 1, 2, \dots$.