

Tentamentsskrivning i **Transformer och differentialekvationer MVE101**

Tid: 18 mars 2023 14:00-18:00

Examinatorer: Erik Broman, tel: 073-7320791

Hjälpmedel: Typgodkänd räknare, utdelade tabeller och en egenhändigt skriven formelsamling om 4 A4-sidor (dvs 2 A4-ark fram och bak eller 4 A4-ark på en sida).

Tentamen består av 6 frågor om sammanlagt 50 poäng. Preliminära betygsgränser är satta till:

betyg "3": 20 till 29.5 poäng

betyg "4": 30 till 39.5 poäng

betyg "5": 40 eller fler poäng.

OBS! Alla lösningar skall vara väl redovisade och motiverade. Talen är ej ordnade efter svårighetsgrad. **Om du fastnar på en uppgift gå vidare till nästa.**

1. Betrakta följande system av kopplade ODE:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 + 2\ddot{x}_2 - x_1 + 3x_2 &= 0 \\ \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 + 3x_1 &= 0\end{aligned}$$

tillsammans med begynnelsevillkoren

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ och } \dot{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Lös detta genom att formulera och lösa motsvarande generaliserade egenvärdesproblem (dvs använd matris-metoderna från kursen). (8p)

Lösning: Vi kan skriva problemet på matrisformen $A\ddot{x} + Bx = 0$ där

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

och

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vår plan är att diagonalisera problemet, dvs hitta matrisen P så att om $x = Py$ så får vi systemet $\ddot{y} + Dy = 0$.

För att göra detta löser vi egenvärdesproblemet

$$Bv = \lambda Av$$

och börjar med att observera att

$$\begin{aligned}\det(B - \lambda A) &= \begin{vmatrix} -1 - \lambda & 3 - 2\lambda \\ 3 - \lambda & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda(1 + \lambda) - (3 - \lambda)(3 - 2\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 9 + 9\lambda - 2\lambda^2 = -\lambda^2 + 10\lambda - 9.\end{aligned}$$

Ekvationen $\lambda^2 - 10\lambda + 9 = 0$ har lösningarna

$$\lambda_1 = 1 \text{ och } \lambda_2 = 9.$$

vilket är våra sökta egenvärden.

För att bestämma egenvektorer betraktar vi först

$$B - \lambda_1 A = \begin{bmatrix} -1 - 1 & 3 - 2 \\ 3 - 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

och vi ser att motsvarande egenvektor är

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Motsvarande för det andra egenvärdet blir

$$B - \lambda_2 A = \begin{bmatrix} -1 - 9 & 3 - 18 \\ 3 - 9 & -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & -15 \\ -6 & -9 \end{bmatrix}$$

och vi ser att motsvarande egenvektor är

$$v_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Vi har alltså att matriserna D, P blir

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Om vi nu betraktar ekvationerna $\ddot{y}_1 + y_1 = 0$ och $\ddot{y}_2 + 9y_2 = 0$ så har dessa lösningarna

$$y_1(t) = a_1 \cos(t) + b_1 \sin(t) \text{ respektive } y_2(t) = a_2 \cos(3t) + b_2 \sin(3t)$$

vilket (enligt formeln $x = Py$) ger att

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 + 3y_2 \\ 2y_1 - 2y_2 \end{bmatrix}.$$

Begynnelsevillkoren ger oss

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1(0) + 3y_2(0) \\ 2y_1(0) - 2y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + 3a_2 \\ 2a_1 - 2a_2 \end{bmatrix}$$

så att $a_1 = a_2 = 1/4$.

Det andra begynnelsevillkoret ger oss att

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(0) \\ \dot{x}_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{y}_1(0) + 3\dot{y}_2(0) \\ 2\dot{y}_1(0) - 2\dot{y}_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 + 9b_2 \\ 2b_1 - 6b_2 \end{bmatrix}$$

så att $b_1 = b_2 = 0$. Detta ger oss till slut

$$x_1 = y_1 + 3y_2 = \frac{\cos(t)}{4} + \frac{3\cos(3t)}{4}$$

och

$$x_2 = 2y_1 - 2y_2 = \frac{\cos(t)}{2} - \frac{\cos(3t)}{2}.$$

2. Betrakta ekvationen

$$\ddot{y}(t) - 4\dot{y}(t) + 5y(t) = u(t).$$

(a) Bestäm en faltningsrepresentation för den allmänna lösningen till ekvationen om randvillkoren är $\dot{y}(0) = 0$ och $y(0) = 0$. (4p)

(b) Bestäm lösningen på enklast möjliga form om

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - 2\pi k).$$

För full poäng skall ett svar anges utan summatecken. (4p)

Lösning:

(a) Den allmänna lösningen ges av $y(t) = (u * g)(t)$ där $g(t)$ är det så kallade impulssvaret. För att beräkna detta sätter vi momentant $u(t) = \delta(t)$, och efter Laplace-transform ser vi att ekvationen blir

$$(s^2 - 4s + 5)G(s) = 1 \Rightarrow G(s) = \frac{1}{s^2 - 4s + 5} = \frac{1}{(s-2)^2 + 1},$$

vilket är vår överföringsfunktion. Impulssvaret blir då

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = e^{2t} \sin(t)H(t)$$

och den allmänna lösningen kan alltså skrivas på formen

$$\begin{aligned} y(t) &= (u * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)u(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\tau} \sin(\tau)H(\tau)u(t-\tau)d\tau = \int_0^{\infty} e^{2\tau} \sin(\tau)u(t-\tau)d\tau. \end{aligned}$$

- (b) Vi börjar med att se att om $u(t) = \delta(t - 2\pi k)$ så blir $u(t - \tau) = \delta(t - \tau - 2\pi k)$ som är en impuls i punkten $\tau = t - 2\pi k$. Observera att om $t < 2\pi k$ så kommer inte impulsen med i integralen nedan. I detta fall får vi att

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^\infty e^{2\tau} \sin(\tau) u(t - \tau) d\tau \\ &= \int_0^\infty e^{2\tau} \sin(\tau) \delta(t - \tau - 2\pi k) d\tau \\ &= e^{2t-4\pi k} \sin(t - 2\pi k) H(t - 2\pi k) = e^{-4\pi k} e^{2t} \sin(t) H(t - 2\pi k). \end{aligned}$$

Detta ger i sin tur att

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^\infty e^{2\tau} \sin(\tau) \sum_{k=0}^\infty \delta(t - \tau - 2\pi k) d\tau \\ &= \sum_{k=0}^\infty \int_0^\infty e^{2\tau} \sin(\tau) \delta(t - \tau - 2\pi k) d\tau \\ &= \sum_{k=0}^\infty e^{-4\pi k} e^{2t} \sin(t) H(t - 2\pi k) = e^{2t} \sin(t) \sum_{k=0}^\infty e^{-4\pi k} H(t - 2\pi k). \end{aligned}$$

Vi ser att för $2\pi n \leq t < 2\pi(n+1)$ så blir

$$\sum_{k=0}^\infty e^{-4\pi k} H(t - 2\pi k) = \sum_{k=0}^n e^{-4\pi k} = \frac{1 - e^{-4\pi(n+1)}}{1 - e^{-4\pi}}$$

så att

$$y(t) = e^{2t} \sin(t) \frac{1 - e^{-4\pi(n+1)}}{1 - e^{-4\pi}} \text{ för } 2\pi n \leq t < 2\pi(n+1) \text{ där } n = 0, 1, 2, \dots$$

3. Betrakta funktionen $f(t) = t(\pi - t)$ på intervallet $0 \leq t < \pi$, och låt $\phi(t)$ vara den (vanliga) periodiska upprepningen av $\phi(t)$ så att

$$\phi(t) = \begin{cases} f(t) & \text{om } 0 \leq t < \pi \\ f(t - k\pi) & \text{om } k\pi \leq t < (k+1)\pi \text{ där } k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

- (a) Bestäm den komplexa Fourierserien för $\phi(t)$. (4p)
- (b) Ange en ungefärlig uppskattning av storleken på felet om man approximerar $\phi(t)$ med $2N + 1$ termer av dess Fourierserie. Hur beror uppskattningen på N ? (4p)

Lösning:

(a) Fourierkoefficienterna ges av uttrycket

$$\begin{aligned}
 c_k &= \frac{1}{T} \int_T \phi(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi t(\pi - t) e^{-2jkt} dt \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[t(\pi - t) \frac{e^{-2jkt}}{-2jk} \right]_0^\pi + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\pi - 2t) \frac{e^{-2jkt}}{2jk} dt \\
 &= 0 + \frac{1}{\pi} \left[(\pi - 2t) \frac{e^{-2jkt}}{-(2jk)^2} \right]_0^\pi - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (-2) \frac{e^{-2jkt}}{-(2jk)^2} dt \\
 &= \frac{1}{4\pi k^2} (-\pi e^{-2jk\pi} - \pi e^0) + \frac{1}{2\pi k^2} \int_0^\pi e^{-2jkt} dt \\
 &= \frac{-2\pi}{4\pi k^2} + \frac{1}{2\pi k^2} \left[\frac{e^{-2jkt}}{-2jk} \right]_0^\pi = -\frac{1}{2k^2} + 0 = -\frac{1}{2k^2},
 \end{aligned}$$

om $k \neq 0$. Om istället $k = 0$ så får vi att

$$c_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi t(\pi - t) dt = \frac{1}{\pi} \left[\frac{t^2\pi}{2} - \frac{t^3}{3} \right]_0^\pi = \frac{1}{\pi} \frac{3\pi^3 - 2\pi^3}{6} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Därför ser vi att

$$\phi(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2jkt} = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{k \neq 0} \frac{1}{2k^2} e^{2jkt}.$$

(b) Felet brukar anges på formen

$$\frac{1}{T} \int_T |\phi(t) - \phi_N(t)|^2 dt \quad (1)$$

där

$$\phi_N(t) = \sum_{k=-N}^N c_k e^{2jkt} = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{\substack{k=-N \\ k \neq 0}}^N \frac{1}{2k^2} e^{2jkt}.$$

Vi vet från föreläsningen att felet (1) också kan skrivas som

$$\frac{1}{T} \int_T |\phi(t)|^2 dt - \sum_{k=-N}^N |c_k|^2,$$

och vidare säger Parsival's formel att

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{T} \int_T |\phi(t)|^2 dt.$$

Detta innebär att

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{T} \int_T |\phi(t) - \phi_N(t)|^2 dt &= \frac{1}{T} \int_T |\phi(t)|^2 dt - \sum_{k=-N}^N |c_k|^2 \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 - \sum_{k=-N}^N |c_k|^2 = \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{4k^4} + \sum_{k=-\infty}^{N+1} \frac{1}{4k^4} = \frac{1}{2} \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^4}.
 \end{aligned} \quad (2)$$

För att utvärera storleken på summan kan man antingen ”veta” svaret eller enkelt uppskatta den med hjälp av en integral. För detta observerar vi att

$$\frac{1}{k^4} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{x^4} dx \text{ för } k=1,2,\dots$$

så att

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^4} \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \int_{k-1}^k \frac{1}{x^4} dx = \int_N^{\infty} \frac{1}{x^4} dx = \left[-\frac{1}{3x^3} \right]_N^{\infty} = \frac{1}{3N^3}.$$

Insatt i (2) ger detta att vi får

$$\frac{1}{T} \int_T |\phi(t) - \phi_N(t)|^2 dt \leq \frac{1}{6N^3}.$$

Anmärkning: Alla (väl motiverade) svar som säger att felet går mot noll som N^3 ger full poäng här.

4. Betrakta ekvationen

$$u'_t(x, t) - u''_{xx}(x, t) = g(x, t) \quad (3)$$

med bivillkoren $u'_x(0, t) = u'_x(\pi, t) = 0$ (RV) och $u(x, 0) = f(x)$ (BV).

- (a) Bestäm den allmänna lösningen till (3) med de angivna bivillkoren i fallet då $g(x, t) = 0$. (6p)
- (b) Bestäm den kompletta lösningen till (3) om

$$g(x, t) = (\sin(t) + \cos(t)) \cos(x).$$

Genomför även en kontroll av ditt svar. (4p)

- (c) Analysera ditt svar i (b) när $t \rightarrow \infty$. Är asymptotiken rimlig? Förklara vad ditt svar betyder ”i verkligheten”. (2p)

Lösning:

- (a) Vi använde variabelseparationsmetoden och ansätter därför $u(x, t) = X(x)T(t)$. Insättning i ekvationen ger oss

$$X(x)T'(t) - X''(x)T(t) = 0 \text{ så att } \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda,$$

och vi får våra ODE

$$X''(x) = -\lambda X(x) \text{ och } T'(t) = -\lambda T(t).$$

De angivna randvillkoren resulterar i

$$X'(0)T(t) = u'_x(0, t) = u'_x(\pi, t) = X'(\pi)T(t) = 0$$

vilket ger att X-ODE'n har randvillkoren $X'(0) = X'(\pi) = 0$. Som brukligt måste vi nu undersöka för vilka λ som X-ODE'n har lösningar. Vi väljer här att konstatera att X-ODE'n är ett Sturm-Liouville problem med (notation som på föreläsningarna) $p(x) \equiv 1$, $q(x) \equiv 0$ och $w(x) \equiv 1$ och med $a_1 = b_1 = 1$ och $a_2 = b_2 = 0$. Känd sats säger att detta problem är positivt semi-definit och speciellt har det enbart lösningar för $\lambda \geq 0$. (Observera att $\lambda = 0$ är en lösning.)

För $\lambda = 0$ har X-ODE'n lösningarna

$$X(x) = c_1 x + c_2 \text{ så att } X'(x) = c_1.$$

Randvärdena ger här att $c_1 = 0$ så att $X_0(x) = c$ är en icke-trivial lösning till problemet motsvarande egenvärdet $\lambda_0 = 0$.

För $\lambda > 0$ gäller att X-ODE'n har lösningarna

$$X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}x)$$

så att

$$X'(x) = c_1 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}x) - c_2 \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}x)$$

och randvillkoren ger då att

$$0 = X'(0) = c_1 \sqrt{\lambda} \text{ så att } c_1 = 0$$

och att

$$0 = X'(\pi) = c_2 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}\pi) - c_2 \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}\pi) = -c_2 \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}\pi).$$

Detta säger oss i sin tur att egenvärdena måste vara

$$\lambda_n = n^2 \text{ för } n = 1, 2, \dots \quad (4)$$

Sammanfattningsvis har vi alltså lösningarna

$$X_n(x) = c_n \cos(\sqrt{\lambda_n}x) \text{ för } n = 1, 2, \dots$$

och vi observerar att detta uttryck även är konsistent med fallet $n = 0$.

Om vi nu vänder oss till T-ODE'n så får vi där lösningarna

$$T_n(t) = e^{-\lambda_n t},$$

och om vi nu sätter samman allt så får vi lösningen

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x) T_n(t) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(\sqrt{\lambda_n}x) e^{-\lambda_n t} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(nx) e^{-n^2 t}. \end{aligned}$$

Till sist konstaterar vi att begynnelsevillkoret $u(x, 0) = f(x)$ ger oss att

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(nx) = f(x),$$

vilket uppfylls ifall vi väljer c_n till att vara de relevanta Fourierkoefficienterna, dvs ifall

$$c_n = \frac{\langle f(x), X_n(x) \rangle}{\|X_n(x)\|^2} = \frac{\int_0^\pi f(x) \cos(nx) dx}{\int_0^\pi \cos^2(nx) dx} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos(nx) dx,$$

för $n = 1, 2, \dots$ och

$$c_0 = \frac{\langle f(x), X_0(x) \rangle}{\|X_0(x)\|^2} = \frac{\int_0^\pi f(x) \cos(0) dx}{\int_0^\pi \cos^2(0) dx} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x) dx.$$

(b) Vi ansätter partikulärlösningen

$$u_p(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \cos(nx)$$

och insatt i ekvation (3) ger detta

$$\sum_{n=0}^{\infty} (u'_n(t) + n^2 u_n(t)) \cos(nx) = g(x, t) = (\sin(t) + \cos(t)) \cos(x).$$

Vi ser därför att för $n = 1$ så har vi ekvationen $u'_1(t) + u_1(t) = \sin(t) + \cos(t)$ vilket har lösningen

$$u_1(t) = \sin(t).$$

För alla andra värden på n har vi att $u'_n(t) + n^2 u_n(t) = 0$ vilket har den triviala lösningen $u_n(t) = 0$ (kom ihåg att vi bara söker en partikulär-lösning, så den alternativa lösningen $u_n(t) = \alpha_n e^{-n^2 t}$ kan vi ignorera. Om vi inte skulle ignorera den så kommer vi se att den är "inbakad" i T-ODE'n redan). Vi ser att

$$u_p(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \cos(nx) = \sin(t) \cos(x).$$

Om vi sätter ihop detta med homogenlösningen från (a) så får vi att

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u_h(x, t) + u_p(x, t) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(nx) e^{-n^2 t} + \sin(t) \cos(x). \end{aligned} \tag{5}$$

Kontroll: Vi har att

$$u'_x(x, t) = - \sum_{n=0}^{\infty} c_n n \sin(nx) e^{-n^2 t} - \sin(t) \sin(x)$$

så att $u'_x(0, t) = 0$ och $u'_x(\pi, t) = 0$. Dessutom gäller att

$$u''_{xx}(x, t) = - \sum_{n=0}^{\infty} c_n n^2 \cos(nx) e^{-n^2 t} - \sin(t) \cos(x)$$

och att

$$u'_t(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(nx) (-n^2) e^{-n^2 t} + \cos(t) \cos(x).$$

Det är enkelt att se att detta uppfyller (3):

$$\begin{aligned} u'_t(x, t) - u''_{xx}(x, t) &= - \sum_{n=0}^{\infty} c_n n^2 \cos(nx) e^{-n^2 t} + \cos(t) \cos(x) \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} c_n n^2 \cos(nx) e^{-n^2 t} + \sin(t) \cos(x) \\ &= (\cos(t) + \sin(t)) \cos(x). \end{aligned}$$

(c) När $t \rightarrow \infty$ ser vi att det som återstår av lösningen i (5) blir

$$u(x, t) = c_0 + \sin(t) \cos(x).$$

Tolkningen av detta är som följer: Vi löser ju värmeledningsekvationen med randvillkoret att ändarna är isolerade. Alla ojämlikheter i värmefördelningen som kommer från begynnelsevillkoret jämnas ut (resulterande i enbart c_0), men värmefördelningen från högerledet $g(x, t)$ finns kvar. Detta är naturligt då högerledet motsvarar tillförande (eller bortförande) av värme och detta sker periodiskt för alla tider.

5. Betrakta egenvärdesproblemet

$$-D[(1 - x + x^2)y'(x)] = \lambda(1 + \sin(\pi x))y(x),$$

med randvillkoren $0 = y'(0)$ och $0 = y(1)$.

- (a) Verifiera att detta problem är ett Sturm-Liouville-problem. (2p)
- (b) Hitta övre och undre begränsningar till alla egenvärdena för detta egenvärdsproblem. (5p)

Lösning:

- (a) Med notation som i häftet/föreläsningarna har vi att $p(x) = 1 + x - x^2 > 0$ för $x \in [0, 1]$, $q(x) \equiv 0$ på $[0, 1]$ och att $w(x) = 1 + \sin(\pi x) > 0$ för $x \in (0, 1)$. Dessutom har vi $a_1 = b_2 = 1$ och medans $a_2 = b_1 = 0$, så att $\max(a_1, a_2) > 0$ och $\max(b_1, b_2) > 0$. Således är detta ett Sturm-Liouville problem. Dessutom är $\max(a_2, b_2) > 0$ så enligt känd sats har vi enbart strikt positiva egenvärden.
- (b) Vi använder här att $\frac{3}{4} \leq 1 - x + x^2 \leq 1$ och att $1 \leq 1 + \sin(\pi x) \leq 2$ för alla $x \in [0, 1]$. Vi kan därför ta

$$p_1(x) = \frac{3}{4}, \quad p_2(x) = 1, \quad w_1(x) = 2 \text{ och } w_2(x) = 1.$$

Självklart tar vi också att $q_1(x) = q_2(x) = 0$.

Problemvariant 1: Här betraktar vi nu problemet

$$-\frac{3}{4}y''(x) = 2\lambda y(x),$$

så att

$$y''(x) = -\frac{8\lambda}{3}y(x),$$

vilket har lösningen

$$y(x) = A \cos\left(\sqrt{\frac{8\lambda}{3}}x\right) + B \sin\left(\sqrt{\frac{8\lambda}{3}}x\right).$$

så att

$$y'(x) = -A\sqrt{\frac{8\lambda}{3}}\sin\left(\sqrt{\frac{8\lambda}{3}}x\right) + B\sqrt{\frac{8\lambda}{3}}\cos\left(\sqrt{\frac{8\lambda}{3}}x\right).$$

Randvillkoren ger oss då att

$$0 = y'(0) = B\sqrt{\frac{8\lambda}{3}},$$

så att $B = 0$, och vidare så blir

$$0 = y(1) = A \cos\left(\sqrt{\frac{8\lambda}{3}}\right) + B \sin\left(\sqrt{\frac{8\lambda}{3}}\right) = A \cos\left(\sqrt{\frac{8\lambda}{3}}\right),$$

vilket har icke-trivial lösningar enbart om

$$\sqrt{\frac{8\lambda_n^{(1)}}{3}} = \frac{\pi}{2} + n\pi \text{ så att } \lambda_n^{(1)} = \frac{3}{8} \left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)^2 \text{ för } n = 0, 1, 2, \dots$$

Problemvariant 2: Här betraktar vi nu problemet

$$-y''(x) = \lambda y(x),$$

så att

$$y''(x) = -\lambda y(x),$$

vilket har lösningen

$$y(x) = A \cos(\sqrt{\lambda}x) + B \sin(\sqrt{\lambda}x).$$

så att

$$y'(x) = -A\sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}x) + B\sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}x).$$

Randvillkoren ger oss då att

$$0 = y'(0) = B\sqrt{\lambda},$$

så att $B = 0$, och vidare så blir

$$0 = y(1) = A \cos(\sqrt{\lambda}) + B \sin(\sqrt{\lambda}) = A \cos(\sqrt{\lambda}),$$

vilket har icke-trivial lösningar enbart om

$$\sqrt{\lambda_n^{(2)}} = \frac{\pi}{2} + n\pi \text{ så att } \lambda_n^{(2)} = \left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)^2 \text{ för } n = 0, 1, 2, \dots$$

Slutligen ser vi alltså att

$$\frac{3}{8} \left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)^2 \leq \lambda_n \leq \left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)^2,$$

för $n = 0, 1, 2, \dots$

6. Fouriertransformer

- Beräkna (för hand) den inversa fouriertransformen av $H(1-|\omega|)$ (där H som vanligt betecknar heaviside-funktionen). Förenkla så långt som möjligt. (3p)
- Hitta (för hand eller med hjälp av tabell) Fouriertransformen av

$$j \frac{\cos(t)}{t}.$$

Skissa en plot över ditt svar. (4p)

Lösning:

(a) Vi har att

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}\{H(1-|\omega|)\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(1-|\omega|) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{j\omega t}}{jt} \right]_{-1}^1 = \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2\pi jt} \\ &= \frac{\cos(t) + j \sin(t) - (\cos(t) - j \sin(t))}{2\pi jt} = \frac{\sin(t)}{\pi t}.\end{aligned}$$

(b) Detta kan göras på mer än ett sätt. Här använder vi oss av att

$$\cos(t) = \frac{e^{jt} + e^{-jt}}{2},$$

en omskrivning som liknar ett av stegen i räkningen i uppgift (a). Vi ser därför att

$$\mathcal{F}\left\{j \frac{\cos(t)}{t}\right\} = \mathcal{F}\left\{j \frac{e^{jt} + e^{-jt}}{2t}\right\} = \frac{j}{2} \left(\mathcal{F}\left\{\frac{e^{jt}}{t}\right\} + \mathcal{F}\left\{\frac{e^{-jt}}{t}\right\} \right). \quad (6)$$

Tabellen säger oss sedan att

$$\mathcal{F}\left\{\frac{j}{t}\right\} = \pi \operatorname{sgn}(\omega) \text{ och att } \mathcal{F}\{f(t)e^{j\omega_0 t}\} = F(\omega - \omega_0).$$

Om vi sätter in detta i (6) ser vi att

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left\{j \frac{\cos(t)}{t}\right\} &= \frac{j}{2} \left(\mathcal{F}\left\{\frac{e^{jt}}{t}\right\} + \mathcal{F}\left\{\frac{e^{-jt}}{t}\right\} \right) \\ &= \frac{\pi}{2} (\operatorname{sgn}(\omega - 1) + \operatorname{sgn}(\omega + 1)) = \begin{cases} -\pi & \text{om } \omega \leq -1 \\ 0 & \text{om } -1 < \omega \leq 1 \\ \pi & \text{om } \omega > 1. \end{cases}\end{aligned}$$