

Tentamentsskrivning i **Transformer och differentialekvationer MVE101**

Tid: 9 juni 2023 8:30-12:30

Examinatorer: Erik Broman, tel: 073-7320791

Hjälpmedel: Typgodkänd räknare, utdelade tabeller och en egenhändigt skriven formelsamling om 4 A4-sidor (dvs 2 A4-ark fram och bak eller 4 A4-ark på en sida).

Tentamen består av 6 frågor om sammanlagt 50 poäng. Preliminära betygsgränser är satta till:

betyg "3": 20 till 29.5 poäng

betyg "4": 30 till 39.5 poäng

betyg "5": 40 eller fler poäng.

OBS! Alla lösningar skall vara väl redovisade och motiverade. Talen är ej ordnade efter svårighetsgrad. **Om du fastnar på en uppgift gå vidare till nästa.**

1. Betrakta systemet

$$B\dot{x} = Ax$$

där

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}, \text{ och } B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Lös detta problem med begynnelsevillkoret

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(8p)

Lösning: Vi kan skriva om problemet på formen $\dot{x} = Cx$ där

$$C = B^{-1}A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Lösningen kan då skrivas som $x = e^{tC}x_0$ så vi måste beräkna e^{tC} . Man kan göra detta med valfri metod, vi använder här Cayley-Hamiltons sats och för att kunna använda den beräknar vi först egenvärdena. Vi har att

$$0 = \det(C - \lambda I) = \begin{vmatrix} -3 - \lambda & -3 \\ 2 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = -(3 + \lambda)(4 - \lambda) + 6 = \lambda^2 - \lambda - 6$$

vilket ger lösningarna

$$\lambda_1 = -2 \text{ och } \lambda_2 = 3.$$

Vi har att $e^{tC} = \alpha_0(t)I + \alpha_1(t)C$ där $\alpha_0(t), \alpha_1(t)$ ges av lösningen till ekvationerna

$$e^{-2t} = \alpha_0(t) - 2\alpha_1(t) \text{ och } e^{3t} = \alpha_0(t) + 3\alpha_1(t).$$

Dessa ekvationer har lösningarna

$$\alpha_0 = \frac{2e^{3t} + 3e^{-2t}}{5} \text{ och } \alpha_1 = \frac{e^{3t} - e^{-2t}}{5}$$

så att

$$\begin{aligned} e^{tC} &= \frac{2e^{3t} + 3e^{-2t}}{5} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{e^{3t} - e^{-2t}}{5} \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -e^{3t} + 6e^{-2t} & -3e^{3t} + 3e^{-2t} \\ 2e^{3t} - 2e^{-2t} & 6e^{3t} - e^{-2t} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Vi ser då till slut att

$$\begin{aligned} x &= e^{tC} x_0 \\ &= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -e^{3t} + 6e^{-2t} & -3e^{3t} + 3e^{-2t} \\ 2e^{3t} - 2e^{-2t} & 6e^{3t} - e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -e^{3t} + 6e^{-2t} \\ 2e^{3t} - 2e^{-2t} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

2. Betrakta ekvationen

$$\ddot{y}(t) - 2\dot{y}(t) + 4y(t) = u(t).$$

- (a) Bestäm överföringsfunktionen och impulssvaret. Är systemet stabilt? (4p)
- (b) Bestäm lösningen till ekvationen om $u(t) = 0$ och om begynnelsevillkoren är $y(0) = 1$ och $\dot{y}(0) = 0$. (4p)

Lösning:

- (a) För att bestämma överföringsfunktionen och impulssvaret skall vi anta homogena randvillkor, dvs $y(0) = 0$ och $\dot{y}(0) = 0$. Dessutom låter vi högerledet vara en impuls $\delta(t)$ och om vi Laplace-transformerar ekvationen får vi då

$$1 = s^2 Y(s) - 2sY(s) + 4Y(s) = (s^2 - 2s + 4)Y(s)$$

så att överföringsfunktionen blir

$$G(s) = \frac{1}{s^2 - 2s + 4} = \frac{1}{(s-1)^2 + 3},$$

och enligt tabell ges impulssvaret $g(t)$ av

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = e^t \frac{\sin(\sqrt{3}t)}{\sqrt{3}} H(t).$$

Vi ser att systemet inte är stabilt då polerna till $G(s)$ är $s_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}i$

(b) Laplace-transformering av ekvationen ger nu

$$\begin{aligned} 0 &= s^2 Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) - 2(sY(s) - y(0)) + 4Y(s) \\ &= (s^2 - 2s + 4)Y(s) - s + 2 \end{aligned}$$

så att

$$Y(s) = \frac{s-2}{(s-1)^2+3} = \frac{s-1}{(s-1)^2+3} - \frac{1}{(s-1)^2+3}.$$

Inverstransformering ger nu att

$$y(t) = e^t \left(\cos(\sqrt{3}t) - \frac{\sin(\sqrt{3}t)}{\sqrt{3}} \right).$$

3. En dimmer fungerar på följande sätt: Istället för en sinuskurva, så ges spänningen av funktionen $\phi(t)$ där $\phi(t)$ är en periodisk upprepning av funktionen

$$f(t) = H(t - 1/2) \sin(2\pi t) \text{ för } 0 \leq t < 1.$$

Funktionen $\phi(t)$ har alltså period 1.

(a) Bestäm den komplexa Fourierserien för $\phi(t)$. (6p)

(b) Använd ditt svar i (a) för att bestämma värdet av

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1 + (-1)^k}{2\pi(k^2 - 1)} \right)^2.$$

Tips: Man kan ha användning av att

$$\int_0^1 \cos(2\pi t)^2 dt = \frac{1}{2}.$$

(4p)

Lösning:

(a) Fourierkoefficienterna ges av uttrycket

$$\begin{aligned}
 c_k &= \frac{1}{T} \int_T \phi(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \int_0^1 H(t - 1/2) \sin(2\pi t) e^{-2\pi j k t} dt \\
 &= \int_{1/2}^1 \sin(2\pi t) e^{-2\pi j k t} dt = \int_{1/2}^1 \frac{e^{2\pi j t} - e^{-2\pi j t}}{2j} e^{-2\pi j k t} dt \\
 &= \frac{1}{2j} \int_{1/2}^1 e^{-2\pi j(k-1)t} - e^{-2\pi j(k+1)t} dt \\
 &= \frac{1}{2j} \left[\frac{e^{-2\pi j(k-1)t}}{-2\pi j(k-1)} - \frac{e^{-2\pi j(k+1)t}}{-2\pi j(k+1)} \right]_{1/2}^1 \\
 &= \frac{1}{-4\pi j} \left(\frac{e^{-2\pi j(k-1)} - e^{-\pi j(k-1)}}{-2\pi j(k-1)} - \frac{e^{-2\pi j(k+1)} - e^{-\pi j(k+1)}}{-2\pi j(k+1)} \right) \\
 &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1 - (-1)^{k-1}}{k-1} - \frac{1 - (-1)^{k+1}}{k+1} \right) \\
 &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1 + (-1)^k}{k-1} - \frac{1 + (-1)^k}{k+1} \right) \\
 &= (1 + (-1)^k) \frac{1}{4\pi} \frac{2}{k^2 - 1} = \frac{1 + (-1)^k}{2\pi(k^2 - 1)}
 \end{aligned}$$

om $k \neq \{-1, 1\}$. Om istället $k = -1$ så får vi att (som ovan)

$$\begin{aligned}
 c_{-1} &= \frac{1}{2j} \int_{1/2}^1 e^{-2\pi j(-2)t} - 1 dt = \frac{1}{2j} \int_{1/2}^1 e^{4\pi j t} - 1 dt \\
 &= \frac{1}{2j} \left[\frac{e^{4\pi j t}}{4\pi j} - t \right]_{1/2}^1 = \frac{e^{4\pi j} - e^{2\pi j}}{-8\pi} - \frac{1}{4j} = \frac{j}{4}
 \end{aligned}$$

och för $k = 1$ så får vi att (igen som ovan)

$$c_1 = \frac{1}{2j} \int_{1/2}^1 1 - e^{-4\pi j t} dt = \frac{1}{4j} = -\frac{j}{4}.$$

Därför ser vi att

$$\phi(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi j k t} = \sum_{k \neq \{-1, 1\}} \frac{1 + (-1)^k}{2\pi(k^2 - 1)} e^{2\pi j k t} + \frac{j}{4} e^{-2\pi j t} - \frac{j}{4} e^{2\pi j t}.$$

(b) Parsevals formel säger att

$$\int_0^T \phi(t)^2 dt = \frac{1}{T} \sum_k |c_k|^2$$

vilket för oss ger

$$\int_{1/2}^1 \sin(2\pi t)^2 dt = \sum_k |c_k|^2 = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + 2 \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1 + (-1)^k}{2\pi(k^2 - 1)} \right)^2$$

så att

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1 + (-1)^k}{2\pi(k^2 - 1)} \right)^2 \\ = \frac{1}{2} \left(\int_{1/2}^1 \sin(2\pi t)^2 dt - \frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{8} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{8} \right) = \frac{1}{16} - \frac{1}{2\pi^2}. \end{aligned}$$

Här använder vi att

$$\int_{1/2}^1 \sin(2\pi t)^2 dt = \frac{1}{2} \int_0^1 \sin(2\pi t)^2 dt = \frac{1}{2} \int_0^1 \cos(2\pi t)^2 dt = \frac{1}{4},$$

enligt tipset.

4. Betrakta den partiella differentialekvationen

$$u''_{tt}(x, t) - c^2 u''_{xx}(x, t) = 0,$$

med randvillkoren $u'_x(0, t) = 0$ och $u'_x(1, t) = 0$ tillsammans med begynnelsevillkoren $u(x, 0) = 3 + 2 \cos(2\pi x)$ och $u'_t(x, 0) = \cos(7\pi x)$.

- (a) Bestäm en lösning till ekvationen med de angivna bivillkoren. (7p)
- (b) Verifiera att ditt svar i (a) verkligen uppfyller ekvationen och de angivna bivillkoren. (3p)

Lösning:

- (a) Vi ansätter $u(x, t) = X(x)T(t)$ och får att

$$X(x)T''(t) = c^2 X''(x)T(t) \text{ så att } \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = -\lambda,$$

vilket ger oss X-ODEn $X''(x) = -\lambda X(x)$ och T-ODEn blir $T''(t) = -\lambda c^2 T(t)$. Randvillkoren för X-ODEn ges av att $0 = u'_x(0, t) = X'(0)T(t)$ så att $X'(0) = 0$ och att $0 = u'_x(1, t) = X'(1)T(t)$ så att $X'(1) = 0$.

Vi kan antingen dela upp i tre fall eller också använder vi teorin om Sturm-Liouville problem. Vi använder den senare metoden av dessa och oberverar därför följande:

Vi har ett Sturm-Liouville problem med $p(x) \equiv 1$, $q(x) \equiv 0$ och $w(x) \equiv 1$. Vidare är (med beteckningar från föreläsning alt häftet) $a_1 = 1, a_2 = 0, b_1 = 1$ och $b_2 = 0$.

Teori ger oss då att alla egenvärdena är icke-negativa.

X-ODE:n Om $\lambda = 0$ har vi lösningen $X(x) = C_1 x + C_2$ och randvillkoret $0 = X'(0)$ ger att $C_1 = 0$ så den enda lösningen är $X(x) = C_2$. För $\lambda > 0$ har vi sedan att $X''(x) = -\lambda X(x)$ löses av

$$X(x) = C_1 \sin(\sqrt{\lambda} x) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda} x),$$

så att

$$X'(x) = C_1\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}x) - C_2\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}x).$$

Det första randvillkoret ger att $0 = X'(0) = C_1$ och det andra ger att $0 = X'(1) = -C_2\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda})$ vilket ger att

$$\sqrt{\lambda_n} = n\pi \text{ så att } \lambda_n = (n\pi)^2$$

för $n = 1, 2, \dots$. Vi har alltså att $X_0(x) = C_2$ och att $X_n(x) = C_2 \cos(n\pi x)$ för $n = 1, 2, \dots$.

T-ODE:n Vi betraktar sedan T-ODE:n $T_n''(t) = -\lambda_n c^2 T(t)$. För $n = 0$ har denna lösningen $T_0(t) = a_0 t + b_0$, och för $n \geq 1$ har den lösningen

$$T_n(t) = a_n \sin(cn\pi t) + b_n \cos(cn\pi t).$$

Vi sätter samman detta och får $u_0(x, t) = a_0 t + b_0$ (vi kan sätta $C_2 = 0$) medans

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = \cos(n\pi x) (a_n \sin(cnt) + b_n \cos(cnt))$$

för $n = 1, 2, \dots$. Vår allmänna lösning blir därför

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = a_0 t + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi x) (a_n \sin(cn\pi t) + b_n \cos(cn\pi t)).$$

Vårt första begynnelsevillkor ger oss

$$3 + \cos(2\pi x) \equiv u(x, 0) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(n\pi x)$$

så att

$$b_0 = 3, \quad b_2 = 1 \text{ och } b_n = 0 \text{ för } n = 1, 3, 4, \dots$$

Vårt andra begynnelsevillkor ger oss

$$\cos(7\pi x) = u'_t(x, 0) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (u_n)'_t(x, 0) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi x) a_n cn\pi,$$

så att

$$a_7 = \frac{1}{7c\pi} \text{ och } a_n = 0 \text{ för } n \neq 7.$$

Vi får då till slut att

$$\begin{aligned} u(x, t) &= b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) \\ &= 3 + \cos(2\pi x) \cos(2c\pi t) + \cos(7\pi x) \frac{\sin(7c\pi t)}{7c\pi}. \end{aligned} \tag{1}$$

(b) Med lösningen $u(x, t)$ som i (1) ser vi att

$$u(x, 0) = 3 + \cos(2\pi x)$$

och att

$$u'_t(x, t) = -2c\pi \cos(2\pi x) \sin(2c\pi t) + \cos(7\pi x) \cos(7c\pi t)$$

så att $u'_t(x, 0) = \cos(7\pi x)$. Detta verifierar begynnelsevillkoren. Vidare har vi att

$$u'_x(x, t) = -2\pi \sin(2\pi x) \cos(2c\pi t) - \sin(7\pi x) \frac{\sin(7c\pi t)}{c}$$

så att $u'_x(0, t) = 0$ och $u'_x(1, t) = 0$ vilket verifierar randvillkoren.

Till sist kontrollerar vi ekvationen och ser att

$$u''_{tt}(x, t) = -(2c\pi)^2 \cos(2\pi x) \cos(2c\pi t) - 7c\pi \cos(7\pi x) \sin(7c\pi t)$$

medans

$$\begin{aligned} u''_{xx}(x, t) &= -(2\pi)^2 \cos(2\pi x) \cos(2c\pi t) - 7\pi \sin(7\pi x) \frac{\sin(7c\pi t)}{c} \\ &= \frac{1}{c^2} u''_{tt}(x, t) \end{aligned}$$

så att även ekvationen är uppfylld.

5. Betrakta egenvärdesproblemet

$$-D \left[\left(\frac{x^2}{3} + 1 \right) y'(x) \right] = \lambda y(x)$$

med randvillkoren $y'(0) = 0$ och $y(1) = 2$.

- (a) Genomför ett steg av iterationsmetoden för att bestämma ett närmevärde till egenvärdet λ_1 . (3p)
- (b) Beräkna de två första Schwarz-talen (medräknat det "0:te") och den första Schwarz-kvoterna. (3p)
- (c) Reflektera över dina svar i (a) och (b). Är det något som är lite märkligt/anmärkningsvärt? (2p)

Lösning:

- (a) Vi börjar med att ansätta $u_0(x) = x^2 + ax + b$. Randvillkoren ger då att $0 = u'_0(0) = a$ och $2 = u_0(1) = 1 + b$ så att $u_0(x) = x^2 + 1$. Iterationsmetoden säger sedan att vi skall lösa problemet

$$-D \left[\left(\frac{x^2}{3} + 1 \right) u'_1(x) \right] = u_0(x) = x^2 + 1$$

så att

$$\left(\frac{x^2}{3} + 1\right) u_1'(x) = -\frac{x^3}{3} - x + c_1$$

Randvillkoret $0 = u_1'(0)$ ger att $c_1 = 0$ och vi ser att

$$\left(\frac{x^2}{3} + 1\right) u_1'(x) = -\frac{x^3}{3} - x = -x \left(\frac{x^2}{3} + 1\right) \text{ så att } u_1(x) = -\frac{x^2}{2} + c_2.$$

Det andra randvillkoret $2 = u_1(1)$ ger sedan att

$$2 = u_1(1) = c_2 - \frac{1}{2} \text{ så att } c_2 = \frac{5}{2}$$

och därmed har vi att

$$u_1(x) = \frac{5 - x^2}{2}.$$

- (b) Schwarz-talen ges av $a_k = \langle Au_k, u_0 \rangle = \langle u_k, u_0 \rangle$ då vi här har att $A = I$. Vi ser att

$$a_0 = \langle u_0, u_0 \rangle = \int_0^1 (x^2 + 1)^2 dx = \int_0^1 x^4 + 2x^2 + 1 dx = \frac{1}{5} + \frac{2}{3} + 1 = \frac{28}{15}$$

och

$$\begin{aligned} a_1 = \langle u_1, u_0 \rangle &= \int_0^1 \frac{5 - x^2}{2} (x^2 + 1) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 -x^4 + 4x^2 + 5 dx = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{5} + \frac{4}{3} + 5 \right) = \frac{46}{15}. \end{aligned}$$

Detta ger Schwarz-kvoten

$$\mu_1 = \frac{a_0}{a_1} = \frac{28}{15} \cdot \frac{15}{46} = \frac{14}{23} \approx 0.6087.$$

- (c) Enligt sats från kursen skall $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \lambda_1$ så en övre begränsning till λ_1 hade varit $\mu_2 \approx 0.6087$ **om alla villkor för de relevanta satserna vore uppfyllda!**. Dock är det ju så att ett Sturm-Liouville problem måste ha homogena randvillkor, vilket vi inte har här ($y(1) = 2$ istället för $y(1) = 0$). Vi kan därför inte hävda att problemet är totaldefinit, och därmed kan vi inte vara säkra på om slutsatsen stämmer i detta fall.

6. Bestäm

$$\sin(\alpha t) * \frac{1}{\pi t},$$

dvs faltningen mellan $\sin(\alpha t)$ och $\frac{1}{\pi t}$. (6p)

Lösning: Vi löser detta med hjälp av att använda Fouriertransformer. Vi har enligt tabell att

$$\mathcal{F}\{\sin(\alpha t)\} = \frac{\pi}{j} [\delta(\omega - \alpha) - \delta(\omega + \alpha)]$$

och att

$$\mathcal{F}\left\{\frac{1}{\pi t}\right\} = \frac{1}{j} \mathcal{F}\left\{\frac{j}{\pi t}\right\} = \frac{1}{j} \text{sign}(\omega)$$

där $\text{sign}(\omega)$ är den så kallade sign-funktionen, dvs den är 1 om $\omega > 0$ och -1 om $\omega < 0$ medans $\text{sign}(0) = 0$. Vi kan nu använda att

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left\{\sin(\alpha t) * \frac{1}{\pi t}\right\} &= \mathcal{F}\{\sin(\alpha t)\} \mathcal{F}\left\{\frac{1}{\pi t}\right\} \\ &= \frac{\pi}{j} [\delta(\omega - \alpha) - \delta(\omega + \alpha)] \frac{1}{j} \text{sign}(\omega) = \pi [\delta(\omega + \alpha) - \delta(\omega - \alpha)] \text{sign}(\omega) \\ &= \begin{cases} -\pi [\delta(\omega + \alpha) + \delta(\omega - \alpha)] & \text{om } \alpha > 0 \\ \pi [\delta(\omega + \alpha) + \delta(\omega - \alpha)] & \text{om } \alpha < 0 \end{cases} \\ &= -\pi \text{sign}(\alpha) [\delta(\omega + \alpha) + \delta(\omega - \alpha)]. \end{aligned}$$

Vidare har vi enligt tabell att

$$\mathcal{F}\{\cos(\alpha t)\} = \pi [\delta(\omega + \alpha) + \delta(\omega - \alpha)]$$

så att

$$\begin{aligned} \sin(\alpha t) * \frac{1}{\pi t} &= \mathcal{F}^{-1}\{-\pi \text{sign}(\alpha) [\delta(\omega + \alpha) + \delta(\omega - \alpha)]\} \\ &= -\text{sign}(\alpha) \mathcal{F}^{-1}\{\pi [\delta(\omega + \alpha) + \delta(\omega - \alpha)]\} = -\text{sign}(\alpha) \cos(\alpha t). \end{aligned}$$