

Tentamentsskrivning i **Transformer och differentialekvationer MVE101**

Tid: 17 Augusti 2023

Examinatorer: Erik Broman, tel: 073-7320791

Hjälpmedel: Typgodkänd räknare, utdelade tabeller och en egenhändigt skriven formelsamling om 4 A4-sidor (dvs 2 A4-ark fram och bak eller 4 A4-ark på en sida).

Tentamen består av 6 frågor om sammanlagt 50 poäng. Preliminära betygsgränser är satta till:

betyg "3": 20 till 29.5 poäng

betyg "4": 30 till 39.5 poäng

betyg "5": 40 eller fler poäng.

OBS! Alla lösningar skall vara väl redovisade och motiverade. Talen är ej ordnade efter svårighetsgrad. **Om du fastnar på en uppgift gå vidare till nästa.**

1. Betrakta ekvationen

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = 0$$

med begynnelsevillkoren $y(0) = \dot{y}(0) = 1$.

- (a) Skriv om detta som ett system av första ordningens ekvationer och uttryck detta system på matrisform. (2p)
- (b) Lös systemet i deluppgift (a). (4p)
- (c) Använd dina svar i (a) och (b) för att bestämma $y(t)$. Verifiera att ditt svar är korrekt. (2p)

Lösning:

- (a) Vi inför variablerna $x_1 = y$ och $x_2 = \dot{x}_1 = \dot{y}$. Om vi sätter in detta i orginalekvationen så får vi

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = \dot{x}_2 + 2x_2 + x_1 = 0$$

så att $\dot{x}_2 = -2x_2 - x_1$. Tillsammans med ekvationen $x_2 = \dot{x}_1$ får vi då systemet

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = Ax.$$

- (b) Vi använder Cayley-Hamiltons metod för att beräkna e^{tA} . Vi börjar med att observera att ekvationen

$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda(2 + \lambda) + 1$$

vilket har lösningarna $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$.

Cayley-Hamiltons sats säger då att

$$e^{tA} = \alpha_0(t)I + \alpha_1(t)A$$

där $\alpha_0(t)$ och $\alpha_1(t)$ ges av lösningarna till ekvationerna

$$e^{-t} = \alpha_0(t) - \alpha_1(t) \text{ och } te^{-t} = \alpha_1(t)$$

vilket ger att $\alpha_0(t) = \alpha_1(t) + e^{-t} = (1+t)e^{-t}$. Till slut ser vi att

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \alpha_0(t)I + \alpha_1(t)A \\ &= (1+t)e^{-t} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + te^{-t} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (1+t)e^{-t} & te^{-t} \\ -te^{-t} & (1-t)e^{-t} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Detta ger att

$$x = e^{tA} * x(0) = \begin{bmatrix} (1+t)e^{-t} & te^{-t} \\ -te^{-t} & (1-t)e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+2t)e^{-t} \\ (1-2t)e^{-t} \end{bmatrix}.$$

(c) Vi har att

$$y = x_1 = (1+2t)e^{-t}.$$

Därmed blir

$$\dot{y} = (1-2t)e^{-t} \text{ och } \ddot{y} = (2t-3)e^{-t}$$

och om vi sätter in detta i orginalekvationen får vi att

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = (2t-3)e^{-t} + 2(1-2t)e^{-t} + (1+2t)e^{-t} = 0$$

som önskat. Vidare så är $y(0) = (1+2 \cdot 0)e^{-0} = 1$ och $\dot{y}(0) = (1-2 \cdot 0)e^{-0} = 1$ så att även begynnelsevillkoren är uppfyllda.

2. Betrakta ekvationen

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = u(t)$$

med begynnelsevillkoren $y(0) = \dot{y}(0) = 1$.

(a) Lös denna ekvation med hjälp av Laplace-transform om $u(t) = 0$.
(4p)

(b) Lös denna ekvation med hjälp av Laplace-transform om $u(t) = \delta(t-a)$ där $a > 0$.
(4p)

Lösning:

(a) Laplace-transform ger

$$\begin{aligned} 0 &= s^2 Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) + 2(sY(s) - y(0)) + Y(s) \\ &= s^2 Y(s) - s - 1 + 2(sY(s) - 1) + Y(s) = (s^2 + 2s + 1)Y(s) - s - 3, \end{aligned}$$

så att

$$Y(s) = \frac{s+3}{(s+1)^2} = \frac{1}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^2}.$$

Tabell ger nu att

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^2} \right\} = e^{-t} + 2te^{-t}.$$

(b) Förändringen jämfört med uppgift (a) är att nu får vi ekvationen

$$\begin{aligned} e^{-as} &= s^2 Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) + 2(sY(s) - y(0)) + Y(s) \\ &= s^2 Y(s) - s - 1 + 2(sY(s) - 1) + Y(s) = (s^2 + 2s + 1)Y(s) - s - 3, \end{aligned}$$

så att

$$Y(s) = \frac{e^{-as} + s + 3}{(s+1)^2} = \frac{1}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{e^{-as}}{(s+1)^2}.$$

Inverstransformering av den extra termen ger nu

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{e^{-as}}{(s+1)^2} \right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+1)^2} \right\} (t-a) \cdot H(t-a) \\ &= (t-a)e^{-(t-a)} H(t-a) \end{aligned}$$

där den sista likheten kommer sig av att

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+1)^2} \right\} = te^{-t}.$$

Sammantaget får vi då att

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = e^{-t} + 2te^{-t} + (t-a)e^{-(t-a)}H(t-a).$$

3. Betrakta funktionen

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{om } 0 \leq t < 1/2 \\ 1+t & \text{om } 1/2 \leq t < 1, \end{cases}$$

och låt $\phi(t)$ vara den periodiska upprepningen av $f(t)$.

(a) Beräkna den komplexa Fourierserien för $\phi(t)$. (6p)

(b) Använd ditt svar i (a) för att bestämma den reella Fourierserien. (2p)

Lösning:

(a) Vi börjar med att notera att $\phi(t)$ har period $T = 1$ så att $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi$. Fourierkoefficienterna ges av

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T} \int_0^T \phi(t) e^{-j\omega_0 kt} dt \\ &= \int_0^{1/2} t e^{-j2\pi kt} dt + \int_{1/2}^1 (1+t) e^{-j2\pi kt} dt \\ &= \int_0^1 t e^{-j2\pi kt} dt + \int_{1/2}^1 e^{-j2\pi kt} dt. \end{aligned}$$

Den första integralen blir

$$\begin{aligned} \int_0^1 t e^{-2\pi jkt} dt &= \left[t \frac{e^{-2\pi jkt}}{-2\pi jk} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{e^{-2\pi jkt}}{-2\pi jk} dt = \frac{e^{-2\pi jk}}{-2\pi jk} + \left[\frac{e^{-2\pi jkt}}{(2\pi jk)^2} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{-2\pi jk} + \frac{e^{-2\pi jk} - 1}{-(2\pi k)^2} = \frac{1}{-2\pi jk} = \frac{j}{2\pi k}, \end{aligned}$$

och den andra blir

$$\begin{aligned} \int_{1/2}^1 e^{-2\pi jkt} dt &= \left[\frac{e^{-2\pi jkt}}{-2\pi jk} \right]_{1/2}^1 \\ &= \frac{e^{-2\pi jk} - e^{-\pi jk}}{-2\pi jk} = \frac{1 - (-1)^k}{-2\pi jk} = \frac{j(1 - (-1)^k)}{2\pi k}, \end{aligned}$$

så att

$$c_k = \frac{j}{2\pi k} + \frac{j(1 - (-1)^k)}{2\pi k} = \frac{2j - j(-1)^k}{2\pi k}$$

om $k \neq 0$. Om istället $k = 0$ så får vi

$$c_0 = \int_0^1 t dt + \int_{1/2}^1 dt = 1.$$

Sammanlagt blir då

$$\phi(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi jkt} = 1 + \sum_{k \neq 0} \frac{2j - j(-1)^k}{2\pi k} e^{2\pi jkt}.$$

(b) Den reella Fourierserien ges av uttrycket

$$\phi(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2\pi kt) + b_k \sin(2\pi kt)$$

där vi enligt föreläsningarna har att $2c_k = a_k - jb_k$. Vi ser därför att $a_0 = 2$ och att för $k \geq 1$

$$a_k - jb_k = 2c_k = 2 \frac{2j - j(-1)^k}{2\pi k}$$

från vilket vi ser att $a_k = 0$ för $k \geq 1$ och att

$$b_k = \frac{(-1)^k - 2}{2\pi k}$$

för $k \geq 1$. Sammantaget ser vi då att

$$\phi(t) \sim 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k - 2}{2\pi k} \sin(2\pi kt)$$

4. Variabelseparation

(a) Lös ekvationen

$$u''_{xx} + u''_{yy} = 0 \text{ på området } [0, 1] \times [0, \pi]$$

med randvillkoren $u(0, y) = 0$, $u(1, y) = 0$, $u'_x(x, 0) = 0$ och $u(x, \pi) = \sin(\pi x) + 3 \sin(3\pi x)$. (10p)

(b) Verifiera ditt svar. (2p)

Lösning:

(a) Vi ansätter $u(x, t) = X(x)Y(y)$ och får att

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0 \text{ så att } \frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda,$$

vilket ger oss X-ODE $X''(x) = -\lambda X(x)$ och Y-ODE'n $Y''(y) = \lambda Y(y)$. Vi börjar med X-ODE'n och delar upp i tre fall, men först betraktar vi randvillkoren. Vi har att $u(0, y) = X(0)Y(y) = 0$ vilket måste innebära att $X(0) = 0$ (annars är ju $Y(y)$ alltid noll) och på samma sätt får vi att $X(1) = 0$. Som vanligt kan man identifiera ett SL-problem eller lösa alla potentiella fall var för sig. Vi väljer här det senare sättet.

Fall 1: Låt $\lambda < 0$. Lösningarna blir då

$$X(x) = Ae^{\sqrt{-\lambda}x} + Be^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

och vi ser då att

$$0 = X(0) = A + B \text{ så att } B = -A.$$

Detta ger oss att

$$0 = X(1) = Ae^{\sqrt{-\lambda}} + Be^{-\sqrt{-\lambda}} = A(e^{\sqrt{-\lambda}} - e^{-\sqrt{-\lambda}}).$$

Då $e^{\sqrt{-\lambda}}$ är ett nollskilt reellt tal (kom ihåg att $\lambda < 0$ i detta fall), har ekvationen bara den triviala lösningen $A = 0$ och därmed också $B = 0$.

Fall 2: Låt nu $\lambda = 0$. Då har vi ekvationern $X''(x) = 0$ som löses av $X(x) = Ax + B$ och instättning av randvillkor ger $X(0) = B = 0$ och $X(1) = A + B = A = 0$. Även här har vi alltså bara en trivial lösning.

Fall 3: Till sist betraktar vi $\lambda > 0$. X-ODE'n har nu lösningen

$$X(x) = A \cos(\sqrt{\lambda}x) + B \sin(\sqrt{\lambda}x).$$

Randvillkoren ger oss nu att $X(0) = A = 0$ och att $X(1) = B \sin(\sqrt{\lambda})$ så att $\lambda_n = (n\pi)^2$ för $n = 1, 2, \dots$. Vi ser då att

$$X_n(x) = B_n \sin(n\pi x) \text{ för } n = 1, 2, \dots$$

Vi betraktar nu Y-ODE'n. Då vi vet från X-ODE'n att $\lambda > 0$ så ser vi att Y-ODE'n enbart har lösningarna

$$Y_n(y) = C_n \cosh(\sqrt{\lambda_n}y) + D_n \sinh(\sqrt{\lambda_n}y).$$

OBS: Man kan också skriva lösningen på formen

$$Y_n(y) = \tilde{C}_n e^{\sqrt{\lambda_n}y} + \tilde{D}_n e^{-\sqrt{\lambda_n}y}$$

vilket i slutändan leder till samma svar.

Randvillkoren för Y_n blir $0 = u'_x(x, 0) = X'_n(x)Y_n(0)$ så att $Y_n(0) = 0$ vilket ger att $Y_n(0) = C_n = 0$ så att

$$Y_n(y) = D_n \sinh(n\pi y).$$

Den sammanlagda lösningen blir då

$$u(x, y) = X_n(x)Y_n(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin(n\pi x) \sinh(n\pi y)$$

och insättning i det sista randvillkoret ger att

$$\sin(\pi x) + 3 \sin(3\pi x) = u(x, \pi) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin(n\pi x) \sinh(n\pi^2)$$

så att $\alpha_n = 0$ för alla $n \neq 1, 3$ och vidare är $\alpha_1 = \frac{1}{\sinh(\pi^2)}$ och $\alpha_3 = \frac{3}{\sinh(3\pi^2)}$. Vi får till slut att

$$u(x, y) = \sin(\pi x) \frac{\sinh(\pi y)}{\sinh(\pi^2)} + 3 \sin(3\pi x) \frac{\sinh(3\pi y)}{\sinh(3\pi^2)}. \quad (1)$$

(b) **Kontroll:** Om vi deriverar uttrycket från (1) så får vi att

$$u''_{xx} = -\pi^2 \sin(\pi x) \frac{\sinh(\pi y)}{\sinh(\pi^2)} - 3^3 \pi^2 \sin(3\pi x) \frac{\sinh(3\pi y)}{\sinh(3\pi^2)}$$

och att

$$u''_{yy} = \pi^2 \sin(\pi x) \frac{\sinh(\pi y)}{\sinh(\pi^2)} + 3^3 \pi^2 \sin(3\pi x) \frac{\sinh(3\pi y)}{\sinh(3\pi^2)}.$$

Därmed blir

$$u''_{xx} + u''_{yy} = 0,$$

som önskat. Vidare är det uppenbart att $u(0, y) = u(1, y) = 0$ då $\sin(0) = \sin(\pi) = 0$ och sedan ser vi att $u'_x(x, 0) = 0$, vilket följer av att $\sinh(0) = 0$. Till sist blir

$$u(x, \pi) = \sin(\pi x) \frac{\sinh(\pi\pi)}{\sinh(\pi^2)} + 3 \sin(3\pi x) \frac{\sinh(3\pi\pi)}{\sinh(3\pi^2)} = \sin(\pi x) + 3 \sin(3\pi x)$$

som önskat.

5. Betrakta egenvärdesproblemet

$$-D[(1+x)y'(x)] + y(x) = \frac{\lambda}{2+x}y(x)$$

med randvillkoren $y'(0) = 0$ och $y'(1) = 0$.

- (a) Verifiera att detta är ett Sturm-Liouville problem. Är $\lambda = 0$ ett egenvärde till problemet? (3p)
- (b) Bestäm övre och undre begränsningar till alla egenvärdena för detta problem. (5p)

Lösning:

- (a) Med notation som kursen ser vi att $p(x) = 1+x$, $q(x) \equiv 1$ och $w(x) = \frac{1}{2+x}$ med $a_1 = 1$ och $b_1 = 1$. Vi observerar även att $p(x), p'(x), q(x)$ och $w(x)$ är reellvärda och kontinuerliga på $[0, 1]$. Dessutom är $p(x) > 0$ och $q(x) \geq 0$ för $x \in [0, 1]$, medans $w(x) > 0$ för $x \in (0, 1)$.

Vi noterar att även om $a_2 = b_2 = 0$ så att $\lambda = 0$ potentiellt skulle kunna vara ett egenvärde, så gäller att $q(x) \not\equiv 0$, och teorin från kursen ger därför att $\lambda = 0$ inte är ett egenvärde.

- (b) För att stänga in egenvärdena betraktar vi begränsningarna

$$p_1(x) = 1 \leq p(x) \leq 2 = p_2(x) \text{ och } w_2(x) = \frac{1}{3} \leq \frac{1}{2+x} \leq \frac{1}{2} = w_1(x).$$

Vi tar så klart även $q_1(x) \equiv q_2(x) \equiv 1$. Vi betraktar nu de två problemvarianterna.

Problemvariant 1: Här betraktar vi nu problemet

$$-y''(x) + y(x) = \frac{1}{2}\lambda y(x),$$

så att

$$y''(x) = -\left(\frac{\lambda}{2} - 1\right)y(x),$$

vilket har lösningen

$$y(x) = A \cos\left(\sqrt{\frac{\lambda}{2} - 1}x\right) + B \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{2} - 1}x\right).$$

Vidare är

$$y'(x) = -A\sqrt{\frac{\lambda}{2} - 1} \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{2} - 1}x\right) + B\sqrt{\frac{\lambda}{2} - 1} \cos\left(\sqrt{\frac{\lambda}{2} - 1}x\right)$$

och randvillkoren ger oss då att

$$0 = y'(0) = B\sqrt{\frac{\lambda}{2} - 1}$$

vilket ger att antingen är $\lambda = 2$ (och därmed blir

$$y(x) = A \cos\left(\sqrt{\frac{2}{2} - 1}x\right) + B \sin\left(\sqrt{\frac{2}{2} - 1}x\right) = A),$$

eller också är $B = 0$. I det senare fallet så ger det andra randvillkoret att

$$\begin{aligned} 0 &= y'(1) \\ &= -A\sqrt{\frac{\lambda}{2} - 1} \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{2} - 1}\right) + B\sqrt{\frac{\lambda}{2} - 1} \cos\left(\sqrt{\frac{\lambda}{2} - 1}\right) \\ &= -A\sqrt{\frac{\lambda}{2} - 1} \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{2} - 1}\right). \end{aligned}$$

Vi ser återigen att antingen är $\lambda = 2$ eller också måste vi ha att

$$n\pi = \sqrt{\frac{\lambda}{2} - 1} \text{ så att } \lambda_n = 2(1 + (n\pi)^2) \text{ för } n = 0, 1, \dots$$

Om vi håller oss till konventionen att det minsta egenvärdet skall vara λ_1 skrivs detta istället

$$\lambda_n^{(1)} = 2(1 + ((n-1)\pi)^2) \text{ för } n = 1, 2, \dots$$

Problemvariant 2: Här betraktar vi nu problemet

$$-2y''(x) + y(x) = \frac{1}{3}\lambda y(x),$$

så att

$$y''(x) = -\left(\frac{\lambda}{6} - \frac{1}{2}\right)y(x) = -\frac{\lambda-3}{6}y(x).$$

vilket har lösningen

$$y(x) = A \cos\left(\sqrt{\frac{\lambda-3}{6}}x\right) + B \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda-3}{6}}x\right).$$

Vidare är

$$y'(x) = -A\sqrt{\frac{\lambda-3}{6}}\sin\left(\sqrt{\frac{\lambda-3}{6}}x\right) + B\sqrt{\frac{\lambda-3}{6}}\cos\left(\sqrt{\frac{\lambda-3}{6}}x\right)$$

och randvillkoren ger oss då att

$$0 = y'(0) = B\sqrt{\frac{\lambda-3}{6}}$$

vilket ger att antingen är $\lambda = 3$ (och därmed blir

$$y(x) = A \cos\left(\sqrt{\frac{3-3}{6}}x\right) + B \sin\left(\sqrt{\frac{3-3}{6}}x\right) = A),$$

eller också är $B = 0$. I det senare fallet så ger det andra randvillkoret att

$$\begin{aligned} 0 &= y'(1) \\ &= -A\sqrt{\frac{\lambda-3}{6}}\sin\left(\sqrt{\frac{\lambda-3}{6}}\right) + B\sqrt{\frac{\lambda-3}{6}}\cos\left(\sqrt{\frac{\lambda-3}{6}}\right) \\ &= -A\sqrt{\frac{\lambda-3}{6}}\sin\left(\sqrt{\frac{\lambda-3}{6}}\right). \end{aligned}$$

Vi ser återigen att antingen är $\lambda = 3$ eller också måste vi ha att

$$n\pi = \sqrt{\frac{\lambda-3}{6}} \text{ så att } \lambda_n = 6(n\pi)^2 + 3 \text{ för } n = 0, 1, \dots$$

Om vi håller oss till konventionen att det minsta egenvärdet skall vara λ_1 skrivs detta istället

$$\lambda_n^{(2)} = 6((n-1)\pi)^2 + 3 \text{ för } n = 1, 2, \dots$$

Slutligen ser vi alltså att

$$2(1 + ((n-1)\pi)^2) \leq \lambda_n \leq 6((n-1)\pi)^2 + 3,$$

för $n = 1, 2, \dots$

6. Fouriertransformer

(a) Visa att

$$\mathcal{F}\{f(-t)\} = F(-j\omega)$$

om Fouriertransformen $\mathcal{F}\{f(t)\}$ existerar. (2p)(b) Låt $a \in \mathbb{R}$. Bestäm (dvs hitta en räkneregler/ motsvarande uttryck som i (a) för)

$$\mathcal{F}\{f(-t + a)\}. \quad (2p)$$

(c) Använd resultatet i (b) för att bestämma Fouriertransformen av $H(a-t)$ där $a \in \mathbb{R}$ (och $H(t)$ som vanligt betecknar Heaviside-funktionen). (2p)**Lösning:**

(a) Detta löser vi med en kort räkning. Vi ser att

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(-t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(-t)e^{-j\omega t} dt = \{-t = s\} \\ &= \int_{\infty}^{-\infty} f(s)e^{j\omega s}(-ds) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-(-j\omega)s} ds = F(-j\omega). \end{aligned}$$

(b) Vi får nu en variant av (a).

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(a-t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(a-t)e^{-j\omega t} dt = \{-t + a = s\} \\ &= \int_{\infty}^{-\infty} f(s)e^{-j\omega(a-s)}(-ds) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-j\omega(a-s)} ds \\ &= e^{-j\omega a} \int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-(-j\omega)s} ds = e^{-j\omega a} F(-j\omega). \end{aligned}$$

(c) Vi ser nu att

$$\mathcal{F}\{H(a-t)\} = \mathcal{F}\{H(-t+a)\} = e^{-j\omega a} \mathcal{F}\{H(t)\}(-j\omega),$$

där den sista likheten följer av (a). Vidare gäller enligt räknereglerna från föreläsningarna/tabellerna att

$$\mathcal{F}\{H(t)\} = \left(\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right)$$

och om vi sätter samman dessa två får vi att

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{H(a-t)\} &= e^{-j\omega a} \left(\pi\delta(-\omega) + \frac{1}{-j\omega} \right) \\ &= e^{-j\omega a} \left(\pi\delta(\omega) + \frac{j}{\omega} \right) = \pi\delta(\omega) + \frac{je^{-j\omega a}}{\omega}. \end{aligned}$$