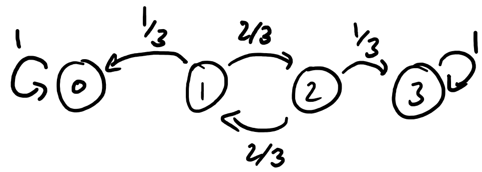
11.2.19 (GS) Tre kort, en snurra. Landar den på $i \in \{1,2,3\}$ så byter kort nummer i ägare.

$S = \{0,1,2,3\}$ (motsvarar antal kort John har)

(a)
$$P^* = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Där tillstånd 0 och 3 är absorberande



sorterar om tillstånden så att P får kanonisk form:

$$P = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1 & 2 & 0 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{matrix} & \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

$Q = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $R = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

\# transienta

(b) Fundamental matris $N = (1_2 - Q)^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]^{-1}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2/3 \\ -2/3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{9}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2/3 \\ 2/3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

(c) Sats:

$\mathbf{d} = N\mathbb{1} = \frac{9}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2/3 \\ 2/3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ där d_j = väntevärde # steg till absorption efter start i tillstånd j

<u>Svar:</u> Det tar i medelvärde 3 steg tills spelet är över.

(d) Frågar efter $P(\text{Kedjan absorberas i tillstånd } 0 \mid \text{vi börjar i tillstånd } 1)$.

Satsen säger att denna slh. finns som element (1,1) i matrisen NR

$$NR = \frac{9}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2/3 \\ 2/3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2/3 \\ 2/3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & 2/5 \\ 2/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

Dvs. den som börjar med 1 kort har chans $\frac{2}{5}$ att vinna; förloras med slh. $3/5$.

(MA) 6.17

Data I: 1, 2, 4, 3, 5, 3, 2, 4, 3

Data II: 1, 2, 1, 2, 5, 5, 4, 2, 5, 1, 5, 3

(a) Beräkna $\bar{x}$: $\quad \bar{x}_I = \frac{27}{9} = 3$, $\bar{x}_{II} = \frac{36}{12} = 3$

och median: $\quad \tilde{x}_I = 3$ (femtstörst i en mängd av 9)

$\tilde{x}_{II} = \frac{x_6 + x_7}{2} = 2.5$ (där $(x_1, \ldots, x_{12})$ är den ordnade mängden)

(b) Variationsbredd ($x_L - x_S = \max\{x_1,\dots,x_n\} - \min\{x_1,\dots,x_n\}$)

I båda datamängder är $x_L = 5$ och $x_S = 1$ alltså variationsbredd $= 4$.

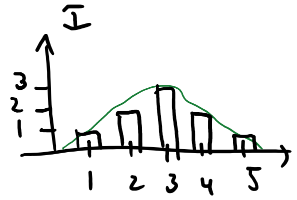
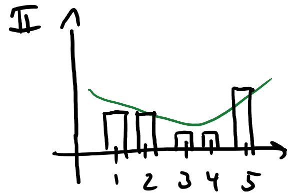
(c) Stickprovsvariansen

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

$$s_I^2 = \frac{\sum_{i=1}^{9} (x_i - \overset{3}{\overset{\shortparallel}{\bar{x}}})^2}{(9-1)} = \frac{(1-3)^2 + (2-3)^2 + \dots + (4-3)^2 + (3-3)^2}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

$$s_I = \sqrt{3/2}$$

$$s_{II}^2 = \frac{32}{11} \approx 2.91 \gg 1.5 \quad ; \quad s_{II} \approx 1.706$$

d)  

Skulle vara överraskad då både fördelningens (approximativa) form och stickprovsvarianserna skiljer sig åt ganska mycket.

7.6

Antag att $X \sim Bin(n,p)$

(a) Ett stickprov ur $Bin(8,p)$ av storlek 20 gav

$\{0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,1,1,1,1,1,2,2,2,3\}$

Väntevärdesriktig estimator för p?

Om $X \sim Bin(8,p) \Rightarrow \mu = EX = 8 \cdot p$

$\bar{X}$ (stickprovsmedelvärdet) är en väntevärdesriktig estimator för $\mu = 8p$

$\Rightarrow \frac{\bar{X}}{8}$ ——— " ——— för $\frac{\mu}{8} = p$.

Punktskattning för p är då $\frac{\bar{X}}{8} = \frac{\frac{16}{20}}{8} = \frac{1}{10} = \hat{p}$

(b) För $X \sim Bin(8,p)$ är $P(X=0) = (1-p)^8$

En skattning baserad på (a) är då $(1-\hat{p})^8 = (0.9)^8 \approx 0.43$.

(c) För $Y \sim Bin(64,p)$ är $P(Y \leq 1) = P(Y=0) + P(Y=1)$

$$= (1-p)^{64} + \binom{64}{1} p(1-p)^{63} = (1-p)^{64} + 64 \cdot p(1-p)^{63}$$

Baserad på (a) får vi en skattning $(1-\hat{p})^{64} + 64\,\hat{p}(1-\hat{p})^{63} \approx 0.00956$.

7.47 Data: se boken, $\sigma = 0.01$

(a) $\bar{x} = 0.643$ $\left(= \frac{\sum_{i=1}^{25} x_i}{25}\right)$, utfallet på $\bar{X}$ är en (vv) punktskattning för populationsmedelvärdet μ.

(b) Antag att $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Bestäm ett 95% K.I.

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} =: Z \sim N(0,1) \quad ; \quad z_{\alpha/2} = 1.96, \text{ här } \alpha = 0.05$$

$\hookrightarrow (1-\frac{\alpha}{2})\cdot 100$-percentil, dvs. $P(Z > z_{\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2} = 0.025$.

$$\underbrace{P\left(-1.96 \le \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le 1.96\right)}\ = 0.95$$

$$\Leftrightarrow -1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \bar{X}-\mu \le 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow +1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \bar{X} \ge +\mu \ge -1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \bar{X}$$

$$\rightarrow P\left(\bar{X} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0.95$$

Med $\bar{X} = \bar{x} = 0.643$ och $\sigma = 0.01$, $n = 25$ får vi ett (symmetriskt) 95% K.I. genom $\bar{x} \pm 1.96\frac{0.01}{\sqrt{25}} = 0.643 \pm 0.00392$

(c) för $\alpha = 0.1$ får vi $z_{\alpha/2} = z_{0.05} = 1.645$ och därmed
0.643 ± 0.00329. (90% K.I., mindre än 95% K.I.)

(d) för $\alpha = 0.001$ får vi $z_{\alpha/2} = z_{0.005} = 2.575$ och därmed
0.643 ± 0.00515. (99% K.I., större)

7.49 $n = 40$, stickprovet består av värden i $\{1,2,3,4\}$

(a) Normalfördelad? Definitivt inte, då utfallen är bara heltal

(b) Beräkna stickprovsmedelvärdet $\bar{X}$: $\bar{x} = 2.8$

(c) $\sigma = 0.5$, Hitta ett 99% K.I. för μ (baserad på Centrala gränsvärdessatsen, då $n = 40 \ge 25$)

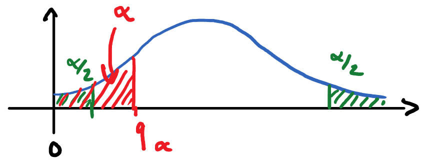
$$2.8 \pm \overset{z_{0.005}}{\overset{\parallel}{2.575}} \cdot \frac{0.5}{\sqrt{40}} = 2.8 \pm 0.20357.$$

$$\left[\bar{x} \pm z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

(d) $\mu = 3.0$ rapporteras, vilket ligger i vårt 99% K.I.
→ datan ger inget underlag att betvivla det rapporterade värdet (med avseende på konfidensgrad 99% åtminstone).

8.4 Sats: $\frac{S^2(n-1)}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$

Är man mest intresserad av att variansen inte är för stor kan man istället välja ett ensidigt K.I. $[0, L]$ där



$L = \frac{(n-1)S^2}{q_\alpha}$ och q_α är sådant att $P(X > q_\alpha) = 1-\alpha$ för $X \sim \chi^2_{(n-1)}$, alltså $\sigma^2 \in [0, L] \Leftrightarrow \sigma^2 \leq \frac{(n-1)s^2}{q_\alpha} \Leftrightarrow \underbrace{\frac{S^2(n-1)}{\sigma^2}}_{\sim \chi^2_{(n-1)}} \geq q_\alpha$, vilket har sannolikhet $1-\alpha$.

OBS: Försök undvika att blanda ihop saker och ting här: Om σ^2 är stor, så är $\frac{s^2(n-1)}{\sigma^2}$ för liten!

Här: $\alpha = 0.05$, $n = 14$ $\xrightarrow{\text{tabell}}$ för $r = 13 = n-1$ och $\alpha = 0.05$ hittar vi $q_\alpha = 5.89$

utfallet på stickprovsmedelvärdet är $\frac{4411}{70} \approx 63.01428$

—— " —— variansen är $s^2 \approx 0.010549$

Ett ensidigt 95% KI för σ^2 ges då av $[0, \frac{(n-1)s^2}{q_{0.05}}] = [0, 0.0233]$ vilket stödjer antagandet att σ inte är större än 0.03.

8.2 Data: se boken, Stickprovets storlek: $n = 30$

(a) Stickprovsmedelvärde: $\bar{X} = \frac{1}{30}\sum_{i=1}^{30} X_i$ har utfall $\bar{x} = 8.62$

Stickprovsvarians $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{30}(X_i - \bar{X})^2}{29} = \frac{592.428}{29} = 20.42855$

(b) $\frac{S^2(n-1)}{\sigma^2} \sim \chi^2_{29}$, $\alpha = 0.1$ ger $q_{\alpha/2} = 17.7$, $q_{1-\alpha/2} = 42.6$

och på så sätt ett 90% KI. $\left(\frac{(n-1)s^2}{q_{1-\alpha/2}}, \frac{(n-1)s^2}{q_{\alpha/2}}\right) = (13.91, 33.47)$,

dvs. med 90% säkerhet ligger den verkliga variansen σ^2 mellan 13.91 och 33.47.

(c) Drar man roten ur motsvarande intervallgränserna får man ett 90% KI för σ: $(3.729, 5.785)$

(d) Om vi lägger våra punktskattningar $\hat{\mu} = \bar{x} = 8.62$ och $\hat{\sigma} = s = 4.52$ till grund skulle ett slumpmässigt valt värde (ur en normalfördelning med väntevärde $\hat{\mu}$ och varians $\hat{\sigma}^2$) med slh. 0.95 ligga inom intervallet $\hat{\mu} \pm 2\hat{\sigma}$ (jfr. Sats i föreläsning 3).

Här ges detta intervallet $(-0.42, 17.66)$ alltså $[0, 17.66)$, då negativa ljusstyrkor inte finns. Ett värde på 18 skulle alltså vara ovanligt. (men inte omöjligt!)