

Diskret matematik

Fördjupning



6.4 Genererande funktioner

Kombinatorik handlar ju mycket om talföljder. Exempelvis ger svaret på frågan *Hur många delmängder finns till en mängd med ett visst antal element?* upphov till den oändliga talföljden

$$2^0 = 1, \quad 2^1 = 2, \quad 2^2 = 4, \quad 2^3 = 8, \quad \dots,$$

medan frågan *Hur många delmängder av storlek k finns till en mängd med 4 element?* ger den ändliga talföljden

$$\binom{4}{0} = 1, \quad \binom{4}{1} = 4, \quad \binom{4}{2} = 6, \quad \binom{4}{3} = 4, \quad \binom{4}{4} = 1.$$

I detta avsnitt ska vi presentera **genererande funktioner** (eng. generation function), ett kraftfullt verktyg för att arbeta med talföljder som kommer att visa sig särskilt lämpat för problem med partitioner. Med den genererande funktionen för en talföljd $\{a_k\}_0^\infty$ menas den formella potensserien

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Talet a_k i talföljden återfinns man alltså som koefficienten framför x^k i den genererande funktionen.

Exempel 6.3 Den genererande funktionen för talföljden $a_k = 2^k$ för $k \geq 0$ är

$$1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k x^k.$$

Detta uttryck är en geometrisk serie och går därför att uttrycka enklare:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (2x)^k = \frac{1}{1-2x}.$$

(Egentligen gäller denna likhet endast när $|x| < \frac{1}{2}$, men det bryr vi oss inte om ty vi ska inte sätta in några värden på x .) All information om den oändliga talföljden ligger alltså i det kompakta uttrycket $1/(1-2x)$. För att få tillbaka talföljden utvecklar vi bara detta uttryck som potensserie,

$$\frac{1}{(1-2x)} = 1 + 2x + (2x)^2 + (2x)^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k x^k,$$

och får fram a_k som koefficienten framför x^k , det vill säga $a_k = 2^k$. ■

Om vi vill ha den genererande funktionen till den andra talföljden vi studerade, $a_k = \binom{4}{k}$, $0 \leq k \leq 4$, ser det i förstone lite problematiskt ut, eftersom definitionen utgick från att man hade en oändlig talföljd. Men vi inser snabbt att frågan *Hur många delmängder av storlek k finns till en mängd med 4 element?* faktiskt även går att besvara för $k > 4$: Det finns inga sådana delmängder, så svaret är noll! Talföljden kan alltså byggas på med oändligt många

nollor, och vi får den genererande funktionen

$$\begin{aligned} \binom{4}{0}x^0 + \binom{4}{1}x^1 + \binom{4}{2}x^2 + \binom{4}{3}x^3 + \binom{4}{4}x^4 + 0x^5 + \dots = \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{4}{k}x^k = (1+x)^4 \end{aligned}$$

Det intressanta är att de tillagda nollorna går att beräkna med exakt samma formel som man normalt sett använder för binomialtal, exempelvis har vi att

$$\binom{4}{5} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 0$$

Tydligt går begreppet binomialtal att generalisera en del. Det visar sig att man till och med kan släppa på kravet att n ska vara ett naturligt tal; det går bra med vilket reellt tal som helst. Om vi exempelvis beräknar taylorpolynomet för $g(x) = (1+x)^{-1} = 1/(1+x)$ får vi

$$\begin{aligned} g(x) = 1 + \frac{-1}{1}x + \frac{(-1)(-2)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{(-1)(-2)(-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots \\ + \frac{(-1)(-2)\dots(-k)}{1 \cdot 2 \dots k}x^k + \dots \end{aligned}$$

en potensserie med koefficienter som beräknas på exakt samma sätt som binomialkoefficienter. Och samma sak för $h(x) = (1+x)^{1/2} = \sqrt{1+x}$, som har taylorpolynomet

$$\begin{aligned} h(x) = 1 + \frac{1/2}{1}x + \frac{(1/2)(-1/2)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{(1/2)(-1/2)(-3/2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots \\ + \frac{(1/2)(-1/2)\dots(-(2k-3)/2)}{1 \cdot 2 \dots k}x^k + \dots \end{aligned}$$

Det här ger oss följande utvidgning av begreppen binomialkoefficient och binomialsatsen:

Definition 6.1: Binomialkoefficient Binomialkoefficienten definieras

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k} = \prod_{i=1}^k \frac{n-i+1}{i}$$

för alla tal n och positiva heltal k . Vidare definieras

$$\binom{n}{0} = 1$$

1. *Potenser av en konstant c.* Talföljden $a_k = c^k$ för $k \geq 0$ har (enligt formeln för geometrisk serie) genererande funktion

$$1 + cx + c^2x^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (cx)^k = \frac{1}{1-cx}.$$

2. *Binomialtal $\binom{n}{k}$ för fixt n .* Talföljden $a_k = \binom{n}{k}$ för $k \geq 0$ och fixt n har (enligt binomialsatsen) genererande funktion

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k}x^k = (1+x)^n.$$

3. *Binomialtal $\binom{n}{k}$ för fixt k .* Talföljden $a_n = \binom{n+k}{k}$ för $n \geq 0$ och fixt $k \geq 1$ har (enligt övning 6.17) genererande funktion

$$\begin{aligned} \binom{k}{k} + \binom{k+1}{k}x + \binom{k+2}{k}x^2 + \dots = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k}x^n = \frac{1}{(1-x)^{k+1}} \end{aligned}$$

Tabell 6.1: Några ofta använda genererande funktioner.

Sats 6.6: Binomialsatsen

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Övning 6.17 Det ser trots allt inte så snyggt ut med negativa tal i binomialkoefficienterna. Försök uttrycka

$$\frac{1}{(1-x)^n}$$

som en summa med "normala" binomialkoefficienter, det vill säga sådana som inte innehåller negativa tal.

Övning 6.18 Ta fram den genererande funktionen för nedanstående talföljder:

(a) $1, 5, 5^2, 5^3, 5^4, 5^5, \dots$

(b) $-2, 4, -8, 16, -32, 64, \dots$

(c) $\binom{1/5}{0}, \binom{1/5}{1}, \binom{1/5}{2}, \binom{1/5}{3}, \dots$

(d) $\binom{17}{17}, \binom{18}{17}, \binom{19}{17}, \binom{20}{17}, \dots$

Övning 6.19: Viktig! Låt $A(x)$ och $B(x)$ vara genererande funktioner för talföljderna $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ respektive $\{b_n\}_{n=0}^\infty$.

- (a) För vilken talföljd är $A(x) + B(x)$ genererande funktion?
- (b) För vilken talföljd är $A(x)B(x)$ genererande funktion?
- (c) För vilken talföljd är $A(x^2)$ genererande funktion?
- (d) För vilken talföljd är derivatan till $A(x)$ genererande funktion?
- (e) För vilken talföljd är $(A(x) - a_0)/x$ genererande funktion?
- (f) Låt a_{-1} vara ett tal. För vilken talföljd är $xA(x) + a_{-1}$ genererande funktion?

Genererande funktioner kan användas till att bestämma antalet heltalslösningar till ekvationer av typen

$$y_1 + y_2 + \dots + y_k = n$$

för olika givna begränsningar av möjliga värden på variablerna y_i .

Exempel 6.4 Hur många heltalslösningar har ekvationen

$$y_1 + y_2 + y_3 = n$$

för $0 \leq y_1 \leq 2$, $1 \leq y_2 \leq 3$ och $1 \leq y_3 \leq 2$?

Svaret får vi som koefficienten framför x^n i produktserien

$$(x^0 + x^1 + x^2)(x^1 + x^2 + x^3)(x^1 + x^2) = x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 5x^5 + 3x^6 + x^7.$$

Varför det? Ta som exempel koefficienten 5 framför x^4 . Den fick vi för att det fanns fem sätt att multiplicera ihop termer ur de tre faktorerna till produkten x^4 , nämligen

$$x^0 \cdot x^2 \cdot x^2, \quad x^0 \cdot x^3 \cdot x^1, \quad x^1 \cdot x^1 \cdot x^2, \quad x^1 \cdot x^2 \cdot x^1 \quad \text{och} \\ x^2 \cdot x^1 \cdot x^1.$$

Detta motsvarar lösningarna $0+2+2$, $0+3+1$, $1+1+2$, $1+2+1$ och $2+1+1$ till ekvationen $y_1 + y_2 + y_3 = 4$. Och vi har valt faktorerna $(x^0 + x^1 + x^2)$, $(x^1 + x^2 + x^3)$ och $(x^1 + x^2)$ så att exponenterna är just de tal som är tillåtna värden för y_1 , y_2 respektive y_3 . ■

Exempel 6.5 Kombinatorikgänget har konfektkalas. Bestäm antalet sätt att fördela 15 identiska konfektbitar bland tre lärare (Kimmo, Hillevi och Pontus) givet att Kimmo vill ha högst fem bitar och Hillevi vill ha minst fem bitar.

Problemet är ekvivalent med att bestämma antalet heltalslösningar till

$$y_1 + y_2 + y_3 = 15$$

med begränsningarna att alla variabler är icke negativa och dessutom att $y_1 \leq 5$ och $y_2 \geq 5$.

Vi inför nu potensserier för varje lärare. Kimmo har serien

$$K(x) = x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 \quad \{\text{geometrisk serie}\} \\ = \frac{1 - x^6}{1 - x}$$

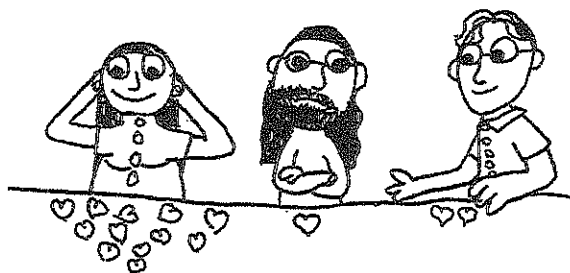
där potenserna motsvarar de tänkbara antalen för Kimmo: 0, 1, 2, 3, 4 och 5. På samma sätt har Hillevi serien

$$H(x) = x^5 + x^6 + x^7 + \dots = x^5(x^0 + x^1 + x^2 + \dots) = \frac{x^5}{1 - x}$$

(det faktum att det inte finns mer än 15 bitar hindrar inte Hillevi från att vilja ha fler än så) medan Pontus har serien

$$P(x) = x^0 + x^1 + x^2 + \dots = \frac{1}{1 - x}.$$

Svaret vi söker är nu koefficienten framför x^{15} i produktserien $K(x)H(x)P(x)$, ty liksom i det föregående exemplet kommer varje tillåten fördelning (exempelvis $2 + 12 + 1$) att ge en motsvarande term $x^2 \cdot x^{12} \cdot x^1 = x^{15}$.



Figur 6.1: Det här var en av varianterna...

Om vi utvecklar produkten $K(x)H(x)P(x)$ får vi

$$\begin{aligned} K(x)H(x)P(x) &= \frac{1-x^6}{1-x} \frac{x^5}{1-x} \frac{1}{1-x} = \\ &= \frac{x^5 - x^{11}}{(1-x)^3} = (x^5 - x^{11}) \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+2}{2} x^n, \end{aligned}$$

genom att utnyttja formel 3 i tabellen med $k=2$: $\frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+2}{2} x^n$. x^{15} -termen blir

$$x^5 \binom{10+2}{2} x^{10} - x^{11} \binom{4+2}{2} x^4 = \left[\binom{12}{2} - \binom{6}{2} \right] x^{15} = 51x^{15},$$

Därmed är 51 svaret på hur många sätt som finns att fördela konfektbitar enligt de givna förutsättningarna.

Ett alternativt sätt att få fram samma svar är att tänka så här: Om Hillevi ska ha minst fem bitar kan vi börja med att ge henne fem bitar. Då har vi tio bitar kvar att fördela på tre personer vilket går att göra på $\binom{10+3-1}{3-1}$ enligt övning 6.3. Men då har vi med även de fall när Kimmo har fått fler än fem bitar. Hur många är det? Vi ger helt enkelt Kimmo sex bitar. Då har vi fyra kvar att fördela, vilket vi kan göra på $\binom{4+3-1}{3-1}$ sätt. Dessa förbjudna fördelningar måste vi dra bort, så svaret blir $\binom{12}{2} - \binom{6}{2}$.

Genererande funktioner är ett sätt att slippa tänka på de olika kombinatoriska fallen. I gengäld måste man förstås klara av kalkylen med potensserierna. ■

När man har fattat galoppen kan man enkelt ställa upp genererande funktioner för liknande problem.

Exempel 6.6 Ställ upp den genererande funktionen för antalet sätt som n kronor kan växlas i enkronor, femkronor och tiokronor.

Antalet växlingar är lika med antalet heltalslösningar till

$$y_1 + 5y_2 + 10y_3 = n$$

med begränsningarna att alla variabler är icke-negativa. Vi inför nu potensserier för varje myntslag. Enkronorna har serien

$$E(x) = x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}$$

där potenserna motsvarar de tänkbara summorna i enkronor: 0, 1, 2, 3, etc. På samma sätt har femkronorna serien

$$F(x) = x^0 + x^5 + x^{10} + x^{15} + \dots = \frac{1}{1-x^5}$$

medan tiokronorna har serien

$$T(x) = x^0 + x^{10} + x^{20} + \dots = \frac{1}{1-x^{10}}.$$

Den genererande funktionen blir nu, på samma sätt som i tidigare exempel, produktserien

$$E(x)F(x)T(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^5)(1-x^{10})}.$$

Övning 6.20 Ställ upp den genererande funktionen för antalet sätt att växla n kronor i enkronor, femkronor, tiokronor och tjugolappar.

Övning 6.21 Ställ upp den genererande funktionen för antalet sätt att växla n kronor i enkronor, femkronor, tiokronor och femtioöringar.

6.5 Genererande funktioner och heltalspartitioner

HOPPA
ÖVER

Heltalspartitioner är särskilt lämpliga att behandla med genererande funktioner. Kom ihåg att $p(n)$ står för antalet partitioner av heltalet n , det vill säga antalet sätt att skriva n som en summa av ett antal ettor, ett antal tvåor, ett antal treor, etc. Detta är ju precis ett sådant växlingsproblem som

behandlades i föregående avsnitt! Vi kan därför direkt skriva upp att den genererande funktionen för $p(n)$ blir

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdots = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k}.$$

På samma sätt får vi genererande funktionen för antalet partitioner när bara vissa delar är tillåtna, exempelvis när bara udda delar får användas:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n \mid \text{udda delar})x^n = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdot \frac{1}{1-x^5} \cdots = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^{2k-1}}.$$

Ett tredje exempel är genererande funktionen för antalet partitioner i olika delar. Att delarna är olika kan också uttryckas som att det är högst en del av varje storlek. Vi kan alltså ha noll eller en etta, vilket ger faktorn $(1+x)$, noll eller en tvåa vilket ger faktorn $(1+x^2)$, och så vidare. Den genererande funktionen blir därför

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n \mid \text{olika delar})x^n = (1+x)(1+x^2)(1+x^3) \cdots = \prod_{k=1}^{\infty} (1+x^k).$$

Partitionsidentiteter kan betraktas som identiteter mellan motsvarande genererande funktioner. I detta avsnitt ska vi belysa två partitionsidentiteter från denna nya synpunkt. Vi börjar med Eulers identitet.

Exempel 6.7: Eulers identitet I avsnitt 6.3.1 studerade vi Eulers identitet:

$$p(n \mid \text{udda delar}) = p(n \mid \text{olika stora delar}).$$

Ett sätt att bevisa denna identitet är att bevisa den motsvarande identiteten för genererande funktioner:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n \mid \text{udda delar})x^n = \sum_{n=0}^{\infty} p(n \mid \text{olika stora delar})x^n.$$

Som vi har sett ovan kan dessa genererande funktioner uttryckas som produkter, så att vi bara har att visa följande identitet:

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^{2k-1}} = \prod_{k=1}^{\infty} (1+x^k).$$

Nu återstår bara formella manipulationer, nämligen förlängning, förkortning och användning av konjugatregeln.

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^{2k-1}} &= \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^{2k}} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^{2k-1}} \prod_{k=1}^{\infty} (1-x^{2k}) \\ &= \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k} \prod_{k=1}^{\infty} (1-x^{2k}) \\ &= \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k} \prod_{k=1}^{\infty} (1-x^k)(1+x^k) \\ &= \prod_{k=1}^{\infty} (1+x^k). \end{aligned}$$

En partitionsidentitet kan alltså bevisas antingen genom en bijektion eller genom verifikation av motsvarande identitet för genererande funktioner. ■

Övning 6.22 I ett av stegen ovan utnyttjade vi likheten

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^{2k}} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^{2k-1}} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k}.$$

Förstår du varför den gäller?

Exempel 6.8: MacMahons rekursion Vi har sett att den genererande funktionen för partitionsfunktionen $p(n)$ är $\frac{1}{1-x} \frac{1}{1-x^2} \frac{1}{1-x^3} \cdots$. Inversen till denna genererande funktion är $(1-x)(1-x^2)(1-x^3) \cdots$. Detta uttryck kan tolkas som genererande funktion för talen

$$p(n \mid \text{jämnt antal olika stora delar}) - p(n \mid \text{udda antal olika stora delar}),$$

ty minustecknen gör att varje produkt av ett udda antal faktorer av typ $(-x^j)$ kommer att ge ett negativt bidrag, medan produkter av ett jämnt antal faktorer ger ett positivt bidrag. Exempelvis får vi koefficienten $1 - 1 = 0$ framför x^3 i utvecklingen av $(1-x)(1-x^2)(1-x^3) \cdots$, ty det finns en partition av 3 i jämnt antal olika stora delar (nämligen $1+2$ som motsvaras av $(-x^1)(-x^2)$ i utvecklingen) och en partition av 3 i udda antal olika stora delar (nämligen 3 som motsvaras av $-x^3$).

Enligt Eulers pentagonaltalesats (övning 6.16) har vi

$$\begin{aligned} p(n \mid \text{jämnt antal olika stora delar}) \\ - p(n \mid \text{udda antal olika stora delar}) &= e(n), \end{aligned}$$

där $e(n) = (-1)^j$ om $n = j(3j \pm 1)/2$ för något heltal j , annars är $e(n) = 0$. Nu utnyttjar vi inversegenskapen:

$$1 = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k} \prod_{k=1}^{\infty} (1-x^k) = \sum_{k=0}^{\infty} p(k)x^k \sum_{k=0}^{\infty} e(k)x^k.$$

För alla $n \geq 1$ kommer alltså koefficienten framför x^n att vara noll i produkten i högerledet, det vill säga

$$p(n)e(0) + p(n-1)e(1) + \dots + p(0)e(n) = 0.$$

Genom att sätta in de kända värdena på alla $e(k)$ får vi ut Eulers rekursion:

$$p(n) = p(n-1) + p(n-2) - p(n-5) - p(n-7) + p(n-12) + p(n-15) - p(n-22) - p(n-26) + \dots$$

där de allmänna termerna ges av $(-1)^{m-1}p(n - m(3m-1)/2)$ och $(-1)^{m-1}p(n - m(3m+1)/2)$ för positiva heltal m . Vi har därmed bevisat sats 6.2. ■

Övning 6.23 Skriv upp den genererande funktionen för följande talföljder ($n = 0, 1, 2, \dots$):

- (a) $p(n \mid \text{alla delar} \leq m)$
- (b) $p(n \mid \text{högst } m \text{ delar})$
- (c) $p(n \mid \text{högst } m \text{ delar av varje storlek})$

Övning 6.24 Bevisa med hjälp av genererande funktioner partitionsidentiteten

$$p(n \mid \text{högst } m-1 \text{ delar av varje storlek}) = p(n \mid \text{ingen del delbar med } m).$$

Övning 6.25: Viktig!

- (a) Visa att $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\dots = \frac{1}{1-x}$.
- (b) För vilken typ av partitioner av n är $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\dots$ genererande funktion?
- (c) Vilken slutsats kan du dra om antalet av partitioner av n av denna typ?

(HOPPA HIT)

6.6 Att lösa rekursionsekvationer med hjälp av genererande funktioner TA MED

De genererande funktionerna ger oss också ett alternativt verktyg för att lösa rekursionsekvationer (se kapitel 4.2). Vi demonstrerar hur man använder det på rekursionsekvationen i exempel 4.4 på sidan 77, eftersom vi där redan vet vad svaret ska bli.

SE Kopia LÄNGST BAK

Metod 6.1: Rekursionsekvation Vi vill lösa nedanstående ekvation:

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+1} = 8a_n + 9 \cdot 10^{n-1} \end{cases}$$

Ekvationen är ju i själva verket en oändlig rad av ekvationer. Vi skriver upp början på listan, och multiplicerar sedan den översta ekvationen med x^2 , nästa med x^3 , och så vidare:

$$\begin{array}{ll} a_2 = 8a_1 + 9 \cdot 10^0 & a_2 x^2 = 8a_1 x^2 + 9 \cdot 10^0 x^2 \\ a_3 = 8a_2 + 9 \cdot 10^1 & a_3 x^3 = 8a_2 x^3 + 9 \cdot 10^1 x^3 \\ a_4 = 8a_3 + 9 \cdot 10^2 & a_4 x^4 = 8a_3 x^4 + 9 \cdot 10^2 x^4 \\ a_5 = 8a_4 + 9 \cdot 10^3 & a_5 x^5 = 8a_4 x^5 + 9 \cdot 10^3 x^5 \\ \vdots = \vdots + \vdots & \vdots = \vdots + \vdots \end{array}$$

Om vi sedan summerar kolumnerna får vi:

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (8a_n x^{n+1} + 9 \cdot 10^{n-1} x^{n+1})$$

Vi städar i summauttrycken:

$$\begin{aligned} VL &= \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \left(\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n \right) + (a_1 x^1 - a_1 x^1) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n - a_1 x^1 \\ HL &= \sum_{n=1}^{\infty} (8a_n x^{n+1} + 9 \cdot 10^{n-1} x^{n+1}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 8x a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} 9x^2 \cdot 10^{n-1} x^{n-1} \\ &= 8x \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n + 9x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (10x)^n \\ &= 8x \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n + 9x^2 \frac{1}{1-10x} \end{aligned}$$

Om vi nu kallar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ för $A(x)$, samt sätter in värdet på a_1 har vi

$$A(x) - 0 = 8xA(x) + \frac{9x^2}{1-10x}$$

vilket efter ytterligare städning ger

$$(1-8x)A(x) = 9x^2 \frac{1}{1-10x} \Rightarrow A(x) = 9x^2 \frac{1}{(1-10x)(1-8x)}$$

Med hjälp av partialbråksuppdelning (förhoppningsvis känt från någon annan kurs) kan vi skriva om bråket, och får då

$$A(x) = 9x^2 \left(\frac{5}{1-10x} - \frac{4}{1-8x} \right)$$

Nu tar vi detta nya uttryck och skriver som summor igen.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = 9x^2 \left(5 \sum_{n=0}^{\infty} (10x)^n - 4 \sum_{n=0}^{\infty} (8x)^n \right)$$

Sätter vi in $a_1 = 0$ samt multiplicerar in x^2 får vi

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = 9 \sum_{n=2}^{\infty} (5 \cdot 10^{n-2} - 4 \cdot 8^{n-2}) x^n$$

och parar vi ihop koefficienter framför motsvarande potenser av x har vi

$$a_n = 9(5 \cdot 10^{n-2} - 4 \cdot 8^{n-2}) = \frac{9}{2}(10^{n-1} - 8^{n-1})$$

Det här är samma svar som vi fick då vi löste ekvationen förra gången, men uträkningen ser verkligen helt annorlunda ut! Fördelen med den här metoden var att vi slapp försöka hitta på en lämplig ansats för partikulärlösningen, nackdelen att vi måste klara att gå mellan summor och funktioner. Vilketdera som är svårast beror mycket på hur problemet ser ut; lyckas man inte på ena sättet kan det vara värt att försöka det andra. ■

Övning 6.26 Lös några av rekursionsekvationerna i avsnitt 4.2 med den här metoden istället. *

Med hjälp av genererande funktioner kan vi också angripa mer komplicerade rekursionsproblem, exempelvis system av rekursionsekvationer.

Exempel 6.9 Vi kan exempelvis betrakta det här problemet:

$$\begin{cases} a_n = \frac{2}{3}a_{n-1} + \frac{1}{3}b_{n-1} \\ b_n = \frac{2}{3}b_{n-1} + \frac{1}{3}a_{n-1} \\ a_0 = 1 \\ b_0 = 0 \end{cases}$$

HOPPA
ÖVER

Om vi multiplicerar de olika ekvationerna med lämpliga potenser av x och summerar får vi (efter lätt uppstädning)

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \frac{2}{3}x \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} + \frac{1}{3}x \sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1} x^{n-1} \\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n = \frac{2}{3}x \sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1} x^{n-1} + \frac{1}{3}x \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} \end{cases}$$

som, om vi sätter in att $A(x)$ är den genererande funktionen för $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ och $B(x)$ är den genererande funktionen för $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$, ger oss

$$\begin{cases} A(x) - a_0 = \frac{2}{3}xA(x) + \frac{1}{3}xB(x) \\ B(x) - b_0 = \frac{2}{3}xB(x) + \frac{1}{3}xA(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (3-2x)A(x) - xB(x) = 3 \\ xA(x) - (3-2x)B(x) = 0 \end{cases}$$

Det här är ett linjärt ekvationssystem, med de två obekanta $A(x)$ och $B(x)$, och kan lösas som ett sådant (förslagsvis med hjälp av Cramers regel, om den är bekant). Det ger

$$\begin{cases} A(x) = \frac{-3(3-2x)}{-(3-2x)^2 + x^2} = \frac{3-2x}{(x-3)(x-1)} \\ B(x) = \frac{-3x}{-(3-2x)^2 + x^2} = \frac{x}{(x-3)(x-1)} \end{cases}$$

vilket kan partialbråksuppdelas till

$$\begin{cases} A(x) = \frac{-3/2}{x-3} - \frac{1/2}{x-1} = \frac{1/2}{1-x/3} + \frac{1/2}{1-x} \\ B(x) = \frac{3/2}{x-3} - \frac{1/2}{x-1} = \frac{-1/2}{1-x/3} + \frac{1/2}{1-x} \end{cases}$$

Återskrivning till summor ger

$$\begin{cases} A(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ B(x) = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} x^n \end{cases}$$

vilket ger

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^n} + \frac{1}{2} \\ b_n = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^n} + \frac{1}{2} \end{cases}$$

Övning 6.27 Försök att lösa detta problem på något annat sätt.

Övning 6.28 Lös följande system av rekursionsekvationer:

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 2b_{n-1} & a_0 = 3 \\ b_n = -a_{n-1} + 5b_{n-1} & b_0 = 2 \end{cases}$$

Ett annat intressant exempel på lösning av en komplicerad rekursionsekvation kommer i kapitel 7.3.

6.7 Exponentiella genererande funktioner

Exempel 6.10 Hur många strängar på fyra bokstäver kan man bilda ur alfabetet $\{a, b, c, d\}$ om det ska vara ett jämnt antal a , högst tre b och ett udda antal c ?

Den här frågan kombinerar två problem: på hur många sätt kan man ta ut bokstäver enligt specifikationerna, och på hur många sätt kan man sedan ordna dem? Den första frågan kan vi enkelt besvara med hjälp av genererande funktioner, ty svaret är ju koefficienten framför x^4 i uttrycket

$$(x^0 + x^2 + x^4)(x^0 + x^1 + x^2 + x^3)(x^1 + x^3)(x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4) = x + 2x^2 + 5x^3 + 8x^4 + \dots$$

De åtta sätten är $cddd$, $cccd$, $bcdd$, $bccc$, $bbcd$, $bbbc$, $aacd$ och $aabc$.

Men på hur många sätt kan de utvalda bokstäverna sedan ordnas? Det kan vi räkna ut med hjälp av **multinomialkoefficienter**. Exempelvis är antalet

sätt att ordna fyra symboler, varav två av en sort och en av två andra (som i $bbcd$), lika med multinomialtalet

$$\binom{4}{2, 1, 1} = \frac{4!}{2!1!1!} = 12$$

Om vi beräknar motsvarande tal för samtliga bokstavssval får vi

$$\begin{aligned} & \binom{4}{1, 3} + \binom{4}{3, 1} + \binom{4}{1, 1, 2} + \binom{4}{1, 3} \\ & + \binom{4}{2, 1, 1} + \binom{4}{3, 1} + \binom{4}{2, 1, 1} + \binom{4}{2, 1, 1} = \\ & = 4 + 4 + 12 + 4 + 12 + 4 + 12 + 12 = 64 \end{aligned}$$

Vi ska nu se att det går att modifiera metoden med genererande funktioner så att den räknar ut dessa multinomialtal. Det verktyg vi ska använda kallas för den **exponentiella genererande funktionen** (eng. exponential generating function) för en talföljd. För talföljden $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ definieras den exponentiella genererande funktionen som

$$a_0 \frac{x^0}{0!} + a_1 \frac{x^1}{1!} + a_2 \frac{x^2}{2!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}.$$

Talet a_k i talföljden återfinns alltså som koefficient framför $x^n/n!$.

Om vi i exemplet ovan använder de exponentiella genererande funktionerna för talföljderna som beskriver det tillåtna antalet av de olika bokstäverna får vi

$$\begin{aligned} & \left(\frac{x^0}{0!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \right) \left(\frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \right) \\ & \cdot \left(\frac{x^1}{1!} + \frac{x^3}{3!} \right) \left(\frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \right) \\ & = \dots + \left(\frac{1}{0!0!1!3!} + \frac{1}{0!0!3!1!} + \frac{1}{0!1!1!2!} + \frac{1}{0!1!3!0!} \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{0!2!1!1!} + \frac{1}{0!3!1!0!} + \frac{1}{2!0!1!1!} + \frac{1}{2!1!1!} \right) x^4 + \dots \\ & = \dots + \left(\frac{4!}{1!3!} + \frac{4!}{3!1!} + \frac{4!}{1!1!2!} + \frac{4!}{1!3!} \right. \\ & \quad \left. + \frac{4!}{2!1!1!} + \frac{4!}{3!1!} + \frac{4!}{2!1!1!} + \frac{4!}{2!1!1!} \right) \frac{x^4}{4!} + \dots \end{aligned}$$

Vi ser att koefficienten framför $x^4/4!$ är just det eftersökta talet! Med exponentiella genererande funktioner får vi in alla fakulteterna automatiskt.

Exempel 6.11 Hur många olika strängar med tre symboler kan bildas av bokstäverna B och C om det får vara högst tre B och högst två C?

Vi sätter upp de exponentiella genererande funktionerna för tillåtna antal av B och C:

$$\left(\frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\right) \text{ för B och } \left(\frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!}\right) \text{ för C.}$$

Produkten av dessa exponentiella genererande funktioner blir

$$\frac{x^0}{0!0!} + 2\frac{x^1}{1!0!} + 2\frac{x^2}{2!0!} + \frac{x^2}{1!1!} + 2\frac{x^3}{2!1!} + \frac{x^3}{3!0!} + \frac{x^4}{2!2!} + \frac{x^4}{3!1!} + \frac{x^5}{3!2!}.$$

Nu skriver vi om detta uttryck till formen av exponentiell genererande funktion genom att förlänga varje x^k -term med $k!$ i både täljare och nämnare:

$$\frac{0!}{0!0!} \frac{x^0}{0!} + 2\frac{1!}{1!0!} \frac{x^1}{1!} + \left(2\frac{2!}{2!0!} + \frac{2!}{1!1!}\right) \frac{x^2}{2!} + \left(2\frac{3!}{2!1!} + \frac{3!}{3!0!}\right) \frac{x^3}{3!} + \left(\frac{4!}{2!2!} + \frac{4!}{3!1!}\right) \frac{x^4}{4!} + \frac{5!}{3!2!} \frac{x^5}{5!}.$$

Koefficienten framför $\frac{x^3}{3!}$ är $(2\frac{3!}{2!1!} + \frac{3!}{3!0!}) = 2 \cdot 3 + 1 = 7$ vilket också är svaret på antalet olika strängar av tre symboler som kan bildas med högst tre B och högst två C. Termerna motsvarar ju nämligen de tänkbara fallen: av två C och ett B eller av ett C och två B kan $2\frac{3!}{2!1!}$ strängar bildas och av tre B och noll C kan $\frac{3!}{3!0!}$ strängar bildas.

Kombinatoriskt hade naturligtvis vi kunnat få fram svaret genom att räkna ut att det finns $2^3 = 8$ trebokstavssträngar av B och C, varav en (CCC) inte är tillåten. Återstår sju. ■

Principen som vi har använt i exemplet ovan kan formaliseras i en sats. Beviset lämnas som övning.

Sats 6.7 Anta att vi har n olika sorters symboler. Låt $M_i \subseteq \mathbb{N}$ vara mängden av tillåtna antal av symbol nr i för $i = 1, \dots, n$. Definiera motsvarande exponentiella genererande funktioner genom

$$g_i(x) = \sum_{k \in M_i} \frac{x^k}{k!}.$$

Räkna ut produkten av alla dessa uttryck, $g_1(x) \cdots g_n(x)$, och sätt upp den på formen

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!}.$$

$$\begin{aligned} e^{cx} &= 1 + cx + \frac{c^2 x^2}{2!} + \frac{c^3 x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c^n \frac{x^n}{n!} \\ e^{-x} &= 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} \\ \frac{e^x + e^{-x}}{2} &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\ \frac{e^x - e^{-x}}{2} &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

Tabell 6.2: Några ofta använda exponentiella genererande funktioner.

Då är koefficienten a_k lika med antalet olika strängar av längd k av de n olika sorters symbolerna, där varje sorts symbol förekommer ett tillåtet antal gånger. ■

Namnet *exponentiell* genererande funktion kommer sig av att exponentialfunktionen e^x är exponentiell genererande funktion till talföljden $1, 1, 1, 1, \dots$:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

vilket man lätt får fram med Taylors formel. Detta är ett samband man måste känna till för att kunna utnyttja den fulla styrkan av exponentiella genererande funktioner. Ur denna formel kan vi också härleda formlerna i tabell 6.2.

Exempel 6.12 Hur många olika strängar av längd k kan bildas med bokstäverna A, K och P om vi kräver att strängarna innehåller ett jämnt antal A, ett jämnt antal K och ett udda antal P?

Beteckna svaret med a_k . Enligt satsen kan vi direkt skriva upp den exponentiella genererande funktionen för dessa antal:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!} = (1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots)^2 (x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots).$$

Enligt formlerna i tabell 6.2 kan vi skriva om den exponentiella genererande

funktionen till

$$\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \frac{1}{8}(e^{3x} + e^x - e^{-x} - e^{-3x}).$$

Vårt sista steg blir att skriva om detta uttryck på form av exponentiell genererande funktion igen:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{8} (3^k + 1 - (-1)^k - (-3)^k) \frac{x^k}{k!}.$$

Vi kan nu se att det blir två fall. För jämna k är $a_k = \frac{1}{8}(3^k + 1 - 1 - 3^k) = 0$. För udda k är $a_k = \frac{1}{8}(3^k + 1 + 1 + 3^k) = \frac{1}{4}(3^k + 1)$. Exempelvis får vi $\frac{1}{4}(3^3 + 1) = \frac{1}{4} \cdot 28 = 7$ strängar av längd $k = 3$ med jämnt antal A och K och udda antal P, nämligen AAP, APA, PAA, KKP, KPK, PKK och PPP.

Om vi vill fundera på om svaret är rimligt kan vi tänka så här: Problemet är klart olösligt för jämna antal bokstäver. För udda antal bokstäver finns det 3^n ord totalt. Ungefär hälften av dem borde ha ett jämnt antal A (och andra hälften ett udda antal), ungefär hälften borde ha ett jämnt antal P. Svaret borde alltså vara i storleksordningen $3^{n/4}$, vilket ju stämmer rätt väl med uträkningen. ■

Övning 6.29 Finn enkla uttryck för de exponentiella genererande funktionerna för följande talföljder $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$:

- (a) $a_k = k!$ för alla $k \geq 0$.
- (b) $a_0 = 0$, $a_k = 1$ för alla $k \geq 1$.
- (c) a_k är antalet sätt att lägga upp en följd av k kort ur en kortlek med 52 kort, för $k \geq 0$.

Övning 6.30 Låt a_k vara antalet binära strängar av längd k som innehåller ett jämnt antal nollor och ett udda antal ettor.

- (a) Försök uppskatta vad svaret på ett ungefär borde bli.
- (b) Bestäm ett uttryck för a_k med hjälp av exponentiella genererande funktioner.
- (c) Förklara kombinatoriskt varför $a_k = 0$ för jämna k medan

$$a_k = \binom{k}{0} + \binom{k}{2} + \binom{k}{4} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{2n}$$

för udda k .

- (d) Ge en enkel förklaring till att de två olika uttryck för a_k som du har fått fram i de två uppgifterna ovan ger samma värde.

Övning 6.31 Bevisa sats 6.7.

4.2.3 Ett längre genomräknat exempel

SE METOD 6.1

Rekursionsekvationer dyker inte bara upp i algoritmanalys, utan är viktiga i alla sorters kombinatoriska situationer. Här följer ett längre genomräknat exempel som tar upp allt från hur man ställer upp en rekursionsekvation till hur man kan tolka resultatet.

Exempel 4.4: Tal med udda antal nollor Hur stor andel av de (decimalt skrivna) positiva heltalen med n siffror har ett udda antal nollor?

Hypotes. Så där på rak arm skulle man väl gissa på ungefär hälften. (Andra hälften skulle då ha ett jämnt antal.)

Test av hypotesen. Det finns sammanlagt 9 tal med en enda siffra (talen 1–9, närmare bestämt). De innehåller samtliga noll stycken nollor, vill säga ett jämnt antal. 0 % var det alltså här som hade ett udda antal nollor.

Det finns 90 tal med två siffror (10–99). Av dem har 10, 20, ..., 90 (det vill säga 9 st) ett udda antal nollor. Det ger 10 %.

Det finns 900 tresiffriga tal. 18 av talen i vart och ett av de 9 hundratalintervallen har en nolla, övriga har ingen eller två. Det ger en andel på $18/900 = 18$ %.

Hypotesen stämde alltså inte så väldigt bra så här för låga värden på n , men man kan ju hoppas att det för stora n börjar närma sig 50 %.

Uppställande av rekursivt samband. Vi börjar med att försöka beräkna antalet tal med längden n och ett udda antal nollor. Det måste vara ett heltal, vilka är betydligt lättare att hantera än bråk, och har man bara antalet så är det sedan ingen konst att beräkna andelen.

Vi kallar antalet tal med n siffror och ett udda antal nollor för a_n . Vi har redan konstaterat att $a_1 = 0$. Om vi vill konstruera ett tal med säg $n + 1$ stycken siffror och ett udda antal nollor kan vi antingen haka på någon av siffrorna 1–9 på ett tal med n siffror och udda antal nollor, eller haka på en nolla på ett tal med n siffror och jämnt antal nollor. Något tillåtet tal som inte går att åstadkomma med någon av dessa manövrar finns inte, och inget tal går att åstadkomma på två olika sätt. (Det är de två villkor man måste kontrollera att är uppfyllda. Allt ska gå att åstadkomma, på ett och endast ett sätt.) Det finns a_n "udda-nolliga" tal att utgå från. Resterande n -siffriga tal måste ha ett jämnt antal nollor. Eftersom det finns $9 \cdot 10^{n-1}$ st n -siffriga tal totalt sett måste $9 \cdot 10^{n-1} - a_n$ av dem ha ett jämnt antal nollor. Sätter vi ihop denna

information får vi rekursionsekvationen

$$a_1 = 0$$

$$a_{n+1} = 9a_n + (9 \cdot 10^{n-1} - a_n)$$

$$= 8a_n + 9 \cdot 10^{n-1}$$