Ex. 10.4 population 1: $N(8, 16)$
population 2: $N(5, 9)$

$\overline{X}_1$: stickprovsmedelvärde av pop. 1 med storlek $n_1 = 25$,
$\overline{X}_2$: — " — 2 — " — $n_2 = 36$.

(a) $\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ (stickprovsmedelvärde) är $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ fördelad

och när populationen är $N(\mu, \sigma^2)$ fördelad.

(b) $\overline{X}_1 \sim N(8, \frac{16}{25})$ och $\overline{X}_2 \sim N(5, \frac{9}{36}) = N(5, \frac{1}{4})$

(c) $\frac{(\overline{X}_1 - 8)}{4/5} \sim N(0,1)$ då $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ger att $\frac{X - \overset{\mu}{a}}{\underset{\sigma}{b}} \sim N(\overset{0}{\frac{\mu - a}{b}}, \overset{1}{\frac{\sigma^2}{b^2}})$

(d) $\frac{(\overline{X}_2 - 5)}{1/2} \sim N(0,1)$ — " —

(e) $\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \sim N(8-5, \underbrace{\frac{16}{25} + \frac{1}{4}}_{})$ (då $\overline{X}_1, \overline{X}_2$ oberoende, se föreläsning)

$= N(3, \frac{89}{100})$ $\quad var(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) \underset{\uparrow \text{ oberoende}}{=} var(\overline{X}_1) + var(-\overline{X}_2) = var(\overline{X}_1) + var(\overline{X}_2)$

(f) $\frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - 3}{\sqrt{89/100}} \sim N(0,1)$.

Ex. 10.15 OBS: populationerna är enligt antagande normalfördelade (annars kommer vi inte vidare här)

Anchorage	Kodiak
$n_1 = 10$	$n_2 = 16$
$\bar{x}_1 = 64.94$	$\bar{x}_2 = 57.06$
$s_1^2 = 9$	$s_2^2 = 7.29$

Den kombinerade stickprovsvariansen ges av

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1) S_1^2 + (n_2 - 1) S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}.$$

(a) har vi inte sysslat med; vi antar istället $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

(b) $s_p^2 = \frac{(n_1 - 1) s_1^2 + (n_2 - 1) s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{9 \cdot 9 + 15 \cdot 7.29}{24} \approx 7.93$

(c) Ett 99% K.I. ges av

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \pm t_{\alpha/2} \sqrt{s_p^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$$ där $\alpha/2 = 0.005$ och $n_1 + n_2 - 2 = 24$ frihetsgrader

vilket ger $t_{\alpha/2} = 2.797$ enligt tabell VI.

$= 7.88 \pm 2.797 \underbrace{\sqrt{7.93\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{16}\right)}}_{1.135} = 7.88 \pm 3.18$

vilket ger $(4.70, 11.06)$.

(d) Då $\mu_1 - \mu_2$ ligger i $(4.70, 11.06)$ med 99% säkerhet stödjer stickproven hypotesen $\mu_1 \neq \mu_2$ då 0 inte ligger i intervallet.

Vi kan till och med säga att det gäller $\mu_1 \geq \mu_2 + 4.7$, med 99% säkerhet.

Ex. 6.17 (EG) Vill visa att

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^n = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}.$$

Bevis med induktion (m.a.p. k)

$k=0$: $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\binom{n}{0}}_{=1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^{0+1}}$. ✓

induktionsbas

indukt. förutsättning : $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k-1} x^n = \frac{1}{(1-x)^k}$

behöver visa att $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^n = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$ följer.

alt. 1) $\frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{(1-x)^k} \overset{\text{I.B. I.F.}}{=} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k-1} x^n}$

$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ med $a_n = \sum_{m=0}^{n} \binom{m+k-1}{k-1}$

Det som krävs är alltså att visa $\sum_{m=0}^{n} \binom{m+k-1}{k-1} = \binom{n+k}{k}$

[går att göra med hjälp av induktion (på n) och $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$]

alt. 2) observera att $\frac{d}{dx} \frac{1}{(1-x)^k} = \frac{d}{dx} (1-x)^{-k} = -k\,(1-x)^{-(k+1)} \cdot (-1) = \frac{k}{(1-x)^{k+1}}$

$\Rightarrow \frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \frac{1}{k} \cdot \frac{d}{dx} \frac{1}{(1-x)^k} \overset{\text{I.F.}}{=} \frac{1}{k} \cdot \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k-1} x^n$

$\overset{\text{termvis der. tillåten}}{=} \frac{1}{k} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k-1} \frac{d}{dx} x^n = \sum_{n=\cancel{0}\,1}^{\infty} \frac{n}{k} \binom{n+k-1}{k-1} x^{n-1}$

$\overset{m=n-1}{=} \sum_{m=0}^{\infty} \underbrace{\frac{m+1}{k} \binom{m+k}{k-1}}_{} x^m = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^n$ □.

$= \frac{(m+k)!}{(k-1)!\,\cancel{(m+1)!}_{\,m!}} \cdot \frac{\cancel{m+1}}{k} = \frac{(m+k)!}{k!\,m!} = \binom{m+k}{k}$

alt. 3) $\frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{1-x}$ ($k+1$ parenteser)

$= (1+x+x^2+\ldots)(1+x+\ldots)\cdot\cdot\,(1+x+x^2+\ldots) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$a_n = \#$ sätt att välja faktorer för att få x^n kan ses som en uppdelning av x^n i $k+1$ "högar"

$x^n = x \cdot x \,\|\, x \cdot x \cdot x \,|\, \cdot \ldots \cdot x$ med $\begin{matrix} x \to 1 \\ | \to 0 \end{matrix}$ blir det en sträng av längd $n+k$

$\hat{=}$ 1100 1110 .... med n 1:or och k stycken 0:or.

$\rightarrow$ finns $a_n = \binom{n+k}{k}$ sätt att fördela 0:orna.

OBS: Uppdelningen ovan motsvarar "balls in urns" där urnorna skiljas åt dock *inte* bollarna.

Ex. 6.19 $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ och $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$

(a) Vilken följd är $A(x)+B(x)$ den gen. funktionen till?

$$A(x)+B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n+b_n)x^n \longrightarrow (a_n+b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$$ dvs. summan av följderna.

(b) $$A(x)\cdot B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{där} \quad c_n = \sum_{m=0}^{n} a_m \cdot b_{n-m}.$$ (Cauchy produkt av två serier)

(c) $$A(x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$$ är gen. funkt. till $(d_m)_{m\in\mathbb{N}}$

där $$d_m = \begin{cases} a_{m/2} & \text{om } n \text{ är jämn} \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

(d) $$A'(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{termvis} \\ \text{der.}}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\cdot a_{n+1} x^n,$$ dvs. $((n+1)a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}_0}$
$= (a_1, 2a_2, 3a_3 \dots)$

(e) $$\frac{A(x)-a_0}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^n,$$ dvs. följden $(a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}_0}$ (förskjuten till vänster)

(f) $$\underset{\substack{\uparrow \\ \in\mathbb{R}}}{a_{-1}} + x\cdot A(x) = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n\cdot x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-1}x^n,$$ dvs. följden $(a_{n-1})_{n\in\mathbb{N}_0}$ (förskjuten till höger)

Ex. 13.3.3 (A)

Hur många heltalslösningar har $y_1+y_2+y_3+y_4=n$ där y_1 är udda, y_2 är jämn och $y_4 \geq 4$?

$$g(x) = \underbrace{(x+x^3+x^5+\dots)\cdot(1+x^2+x^4+\dots)}\cdot(1+x+x^2+x^3+\dots)(x^4+x^5+x^6+\dots)$$

$$= x(1+x^2+x^4+\dots)^2\cdot x^4(1+x+x^2+x^3+\dots)^2$$

$$= x\cdot\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^2\cdot x^4\cdot\left(\frac{1}{1-x}\right)^2 = \frac{x^5}{(1-x^2)^2(1-x)^2}$$

Svaret är den n-te koefficienten i $$\frac{x^5}{(1-x^2)^2(1-x)^2} = \frac{x^5}{(1+x)^2(1-x)^4} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$
där a_n är svaret på frågan ovan.

Strategi: Partial bråks uppdelning; ger (efter mycket beräkning, därför kräver uppgiften inte det)

$$\frac{x^5}{(1+x)^2(1-x)^4} = \frac{3}{16}\cdot\frac{1}{1+x} - \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{13}{16}\cdot\frac{1}{1-x} + \frac{23}{16}\frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{(1-x)^3} + \frac{1}{4}\frac{1}{(1-x)^4}$$

finns med bland våra vanliga genererande funktioner (föreläsning 11)

Ex. 13.3.13' Hur många sätt finns det att välja ut 4 bollar ur en samling med 6 röda, 12 svarta, 7 vita, 10 blåa med restriktionen att ett jämnt antal blåa måste väljas?

$$g(x) = (1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x+\dots+x^4)(1+x\dots+x^4)(1+x^2+x^4)$$

$$= (1+x+x^2+x^3+x^4)^3(1+x^2+x^4) = 1+3x+7x^2+13x^3+22x^4+31x^5+\dots$$

Svaret är koeff. framför x^4 i $g(x)$, alltså 22.

OBS: Uppg. 13.3.13 säger eg. att n bollar ska väljas utav vilka 4 är svarta. Läste fel. Den ursprungliga uppgiften är tråkigare, svar finns i pdf:en.

Ex. 13.3.31 Hitta koefficienten framför x^{12} i $f(x) = \frac{x+3}{1-2x+x^2} = \frac{x+3}{(1-x)^2}$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+1}{1}x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot x^{n-1}$$

$$\Rightarrow f(x) = (x+3)\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = \sum_{n=\cancel{1}0}^{\infty} n\, x^n + \sum_{n=0}^{\infty}3\cdot(n+1)x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(4n+3)x^n, \text{ dvs. } a_{12} = 4\cdot 12+3 = 51.$$

Ex. 13.2.19

$$\frac{1}{(x+1)(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x+3)} \text{ ger } A = -\frac{1}{6},\ B = \frac{1}{15},\ C = \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{(x+1)(x-2)(x+3)} = -\frac{1}{6}\cdot\underbrace{\frac{x}{x+1}}_{=\left(1-\frac{1}{x+1}\right) \text{ etc.}} + \frac{1}{15}\cdot\frac{x}{x-2} + \frac{1}{10}\cdot\frac{x}{x+3} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x+1} + \frac{2}{15}\cdot\frac{1}{x-2} - \frac{3}{10}\cdot\frac{1}{x+3}.$$

Med $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ följer t.ex. $\frac{1}{x-2} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{x}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n$

$$\frac{x}{(x+1)(x-2)(x+3)} = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n - \frac{1}{15}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n - \frac{1}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{3}\right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{6}(-1)^n - \frac{1}{15}2^{-n} - \frac{1}{10}(-3)^{-n}\right]x^n.$$

Ex. 13.2.29 $\quad a_0 = 1,\ a_1 = 3,\ a_n = 7 \cdot a_{n-1} - 10\, a_{n-2}$ för $n \geq 2$

$$\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n}_{g(x) - 1 - 3x} = 7x \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} \left(a_{n-1} x^{n-1}\right)}_{= \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = g(x) - 1} - 10x^2 \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} \left(a_{n-2} x^{n-2}\right)}_{= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = g(x)}$$

Skriver vi $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ fås $g(x) - (1+3x) = 7x\,(g(x) - 1) - 10x^2 g(x)$.

$$\iff g(x)\left(1 - 7x + 10x^2\right) = 1 + 3x - 7x = 1 - 4x \iff g(x) = \frac{1-4x}{1-7x+10x^2} \overset{\text{pq-formel}}{=} \frac{1-4x}{(1-2x)(1-5x)}$$

Då $\dfrac{1}{(1-2x)(1-5x)} = \dfrac{A}{1-2x} + \dfrac{B}{1-5x}$ ger $A = -\frac{2}{3},\ B = \frac{5}{3}$ följer

$$g(x) = \frac{4x-1}{3}\left[2 \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n}_{= \frac{1}{1-2x}} - 5 \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (5x)^n}_{= \frac{1}{1-5x}}\right] = \frac{4}{3} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \left(2^{n+1} - 5^{n+1}\right) x^{n+1}}_{= \sum_{m=\cancel{1}0}^{\infty} (2^m - 5^m) x^m \text{ då } 2^0 = 5^0 = 1} - \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(2^{n+1} - 5^{n+1}\right) x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{4}{3}\left(2^n - 5^n\right) - \frac{1}{3}\left(2^{n+1} - 5^{n+1}\right)\right] x_n,$$

alltså $a_n = \frac{2}{3} \cdot 2^n + \frac{1}{3} 5^n$ för $n \in N_0$.