Ex. 6.21 (EG)

Exponentiell genererande funktion till $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ är $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!}$.

(a) $a_k = k!$ för alla $k \in \mathbb{N}_0 = \{0,1,2,3\ldots\}$

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \cancel{k!} \frac{x^k}{\cancel{k!}} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \quad \text{för } |x|<1$$

(b) $a_0 = 0$, $a_k = 1$ för alla $k \in \mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\}$

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 1\cdot \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} - 1 = e^x - 1$$

(c) $a_k = \binom{52}{k}\cdot k! = \frac{52!}{(52-k)!\,\cancel{k!}}\cdot \cancel{k!} = \frac{52!}{(52-k)!}$ för $0 \le k \le 52$, 0 annars.

$\binom{52}{k}$ sätt att välja ut k kort ur 52 stycken och $k!$ ordningar

$$g(x) = \sum_{k=0}^{52} \frac{52!}{(52-k)!}\frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{52}\binom{52}{k} x^k = (1+x)^{52}$$

Ex. 3.32 (MA)

X (diskret) har m.g.f. $m_X(t) = e^{2(e^t-1)}$.

Vi vet att $\mathbb{E}(X^k) = m_X^{(k)}(0) = \frac{d^k}{dt^k} m_X(t)\Big|_{t=0}$

$$m_X'(t) = e^{2(e^t-1)}\cdot 2e^t = 2\cdot e^{2e^t-2+t}$$

$$m_X''(t) = 2\cdot e^{2e^t-2+t}\cdot(2e^t+1)$$

(a) $\mathbb{E}X = m_X'(0) = 2\cdot e^0 = 2$

(b) $\mathbb{E}X^2 = m_X''(0) = 2\cdot e^0\cdot 3 = 6$

(c) $\sigma^2 = \mathrm{var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2 = 6 - 2^2 = 2$

$\sigma = \sqrt{\mathrm{var}(X)} = \sqrt{2}$.

Ex. 7.39

$X_1, X_2, \ldots X_n$ oberoende med $m_{X_i}(t)$ som motsvarande m.g.f.

Låt $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ och $Y = a_0 + a_1X_1 + \ldots + a_nX_n$

$$m_Y(t) = \mathbb{E}(e^{Yt}) = \mathbb{E}\left[\exp((a_0+a_1X_1+\ldots+a_nX_n)\cdot t)\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[e^{a_0t}\cdot e^{a_1tX_1}\cdot\ldots\cdot e^{a_ntX_n}\right]$$

$\in\mathbb{R}$ n stycken oberoende s.v. er

$\mathbb{E}(XZ) = \mathbb{E}X\cdot\mathbb{E}Z$ för oberoende X, Z

$$\overset{\downarrow}{=} e^{a_0t}\cdot\mathbb{E}(e^{a_1tX_1})\cdot\mathbb{E}(e^{a_2tX_2})\cdot\ldots\cdot\mathbb{E}(e^{a_ntX_n})$$

$$= e^{a_0t}\cdot m_{X_1}(a_1t)\cdot m_{X_2}(a_2t)\cdot\ldots\cdot m_{X_n}(a_nt) = e^{a_0t}\cdot\prod_{i=1}^{n} m_{X_i}(a_it).$$

Ex. 7.46 (HA)

$X \sim N(10, 9)$ och $Y \sim N(9, 16)$ är <u>oberoende</u>.

(a) Fördelning av $X - Y$?

$\mathbb{E}(X-Y) = \mathbb{E}X - \mathbb{E}Y = 1$

$\operatorname{var}(X-Y) \underset{X,Y \text{ ober.}}{=} \operatorname{var}(X) + \operatorname{var}(-Y) = \operatorname{var}(X) + (-1)^2 \cdot \operatorname{var}(Y) = 25$

OBS: om $Y \sim N(9, 16)$ gäller $-Y \sim N(-9, 16)$ (symmetri av $N(0, \sigma^2)$)

Dvs. $X + (-Y)$ är en summa av två oberoende normalfördelningar och därför normalfördelad (sats: för. 13)

$\Rightarrow X - Y \sim N(1, 25)$

(b) $P(X < Y) = \mathbb{P}(X - Y < 0) = \mathbb{P}\Big(\underbrace{\frac{X-Y-1}{5}}_{= Z \sim N(0,1)} \leq \frac{-1}{5}\Big) \overset{\text{tabell s.697}}{=} 0.4207$

[då $U \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \frac{U-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$]

Ex. 8.1.1 (GS) Symmetriskt mynt kastas 100 gånger

antalet gånger krona $=: X \sim \operatorname{Bin}(100, \frac{1}{2})$

- $\mathbb{E}X = n \cdot p = 100 \cdot \frac{1}{2} = 50$
- $\sigma = \sqrt{n\,p(1-p)} = \sqrt{100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5$
- $P(|X - \mu| \geq 3\sigma) = \mathbb{P}(|X - 50| \geq 15) \leq \frac{\operatorname{var}(X)}{225} = \frac{1}{9}$

Chebyshev: $P(|X - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\operatorname{var}(X)}{\varepsilon^2}$

Ex. 8.1.10 X en slumpvariabel med värdemängd $\{0, 1, 2, \dots, n\}$, dvs.

$\mathbb{P}(X \in \{0, 1, \dots, n\}) = 1$, samt $\mathbb{E}X = 1$ och $\operatorname{var}(X) = 1$.

Visa att $\mathbb{P}(X \geq k+1) \leq \frac{1}{k^2}$.

Chebyshev här ($\mu = \sigma^2 = 1$): $\quad P(|X - 1| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}$

OBS: $X \geq k+1 \Leftrightarrow X - 1 \geq k \Rightarrow |X - 1| \geq k$, dvs.

$\{X \geq k+1\} \subseteq \{|X-1| \geq k\}$, $\quad P(X \geq k+1) \leq \mathbb{P}(|X-1| \geq k) \overset{\text{Chebyshev}}{\leq} \frac{1}{k^2}$ $\square$.

Ex. 8.2.4

$X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ där $\lambda = 0.1$ dvs.

$f_X(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}$ för $x \in [0,\infty)$, 0 annars

$t<\lambda$ annars divergent

(a) $$m_X(t) = \mathbb{E}\, e^{tX} = \int_0^\infty e^{tx}\, \lambda \cdot e^{-\lambda x}\, dx = \lambda \int_0^\infty e^{(t-\lambda)x}\, dx \overset{!}{=} \left[\frac{\lambda}{t-\lambda} e^{(t-\lambda)x}\right]_0^\infty$$

$$\overset{!}{=} -\frac{\lambda}{t-\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda - t} \quad \text{för } t<\lambda.$$

$$m_X'(t) = \frac{\lambda}{(\lambda-t)^2}, \quad m_X''(t) = \frac{2\lambda}{(\lambda-t)^3}$$

$$\mathbb{E}X = \frac{\lambda}{(\lambda-0)^2} = \frac{1}{\lambda}, \quad \mathbb{E}(X^2) = \frac{2\lambda}{(\lambda-0)^3} = \frac{2}{\lambda^2} \Rightarrow \mathrm{var}(X) = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

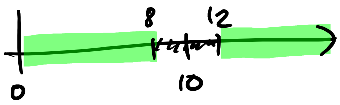
$\lambda = 0.1$ ger $\mathbb{E}X = 10$ och $\mathrm{var}(X) = 100$.

(b) $$\mathbb{P}(|X - \overset{\mathbb{E}X}{10}| \geq 2) \leq \frac{\overset{\mathrm{var}(X)}{100}}{2^2} = 25, \quad \mathbb{P}(|X-10|\geq 5) \leq \frac{100}{25} = 4, \quad \mathbb{P}(|X-10|\geq 9) \leq \underbrace{\frac{100}{81}}_{>1}$$

hjälper exakt ingenting! :(

$$\mathbb{P}(|X-10| \geq 20) \leq \frac{100}{20^2} = \frac{1}{4}$$

(c) $$\mathbb{P}(X \leq x) = F_X(x) = \int_0^x \lambda \cdot e^{-\lambda y}\, dy = 1 - e^{-\lambda x}$$



- $\mathbb{P}(|X - 10| \geq 2) = \mathbb{P}(X \in [0,8] \cup [12,\infty)) = \mathbb{P}(X\in[0,8]) + \mathbb{P}(X \geq 12)$
  $= F_X(8) + 1 - F_X(12) = 1 - e^{-0.8} + e^{-1.2} \approx 0.852$
- $\mathbb{P}(|X-10|\geq 5) = \mathbb{P}(X\in[0,5]) + \mathbb{P}(X\in[15,\infty)) = 1 - e^{-0.5} + e^{-1.5} \approx 0.617$
- $\mathbb{P}(|X-10|\geq 9) = 1 - e^{-0.1} + e^{-1.9} \approx 0.245$
- $\mathbb{P}(|X-10|\geq 20) = \underbrace{\mathbb{P}(X \leq -10)}_{=0} + \mathbb{P}(X\geq 30) = 1 - F_X(30) = e^{-3} \approx 0.0498$.

$\longrightarrow$ För så stor varians är Chebyshev bara hjälpsamt för stora avvikelser.

Ex. 8.2.10

X har värdemängd $[0,100]$ med $\mathbb{E}X = 70$ och $\mathrm{var}(X) = 25$

(a) $$\mathbb{P}(65 < X < 75) = \mathbb{P}(|X-70|<5) = 1 - \mathbb{P}(|X-70|\geq 5) \overset{\text{cheb.}}{\geq} 1 - \frac{\mathrm{var}(X)}{25} = 0 \quad :($$

(b) För $n = 100$, alltså $X_1, \dots, X_{100}$ har samma fördelning som X och är oberoende, vill vi undersöka samma för medelvärdet

$$\mathbb{P}\left(\underbrace{\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i}{100}}_{=:\bar{X}} \in (65,75)\right) \overset{\text{som ovan}}{\geq} 1 - \frac{\mathrm{var}(\bar{X})}{25} \quad (\text{då } \mathbb{E}\bar{X} = \mathbb{E}X = 70)$$

$$\mathrm{var}(\bar{X}) = \frac{1}{100^2}\, \mathrm{var}\left(\sum_{i=1}^{100} X_i\right) \overset{\text{ober.}}{=} \frac{1}{100^2} \sum_{i=1}^{100} \mathrm{var}(X_i) = \frac{1}{100^2} \cdot 100 \cdot \mathrm{var}(X)$$

$$= \frac{\mathrm{var}(X)}{100} \quad \left(= \frac{\sigma^2}{n}\text{, jfr. stickprovsmedelvärde}\right)$$

alltså: $$\mathbb{P}(65 < \bar{X} < 75) \geq 1 - \frac{\cancel{25}}{100 \cdot \cancel{25}} = 0.99.$$