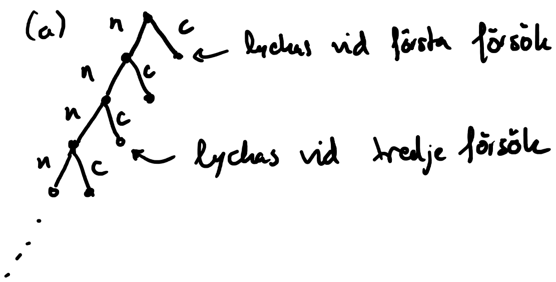
Ex. 1.3 Om en kvinna bär genomet av hemophilia och föder en son har den sjukdomen med sannolikhet $\frac{1}{2}$.

- Om en sådan kvinna föder två söner är sannolikheten att båda har sjukdomen $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ (så länge det är "oberoende försök").
- Vi antar en matematisk modell (kasta mynt oberoende för varje son som föds) då, alltså handlar det om en teoretisk sannolikhet (i motsatsen till erfarenhetsgrundad /statistisk).

Ex. 1.7 En dator försöker koppla upp sig.
Två utfall i varje omgång: lyckas (c), misslyckas (n)
Avslutas när datorn är uppkopplad.

(a)



(c) $S = \{c, nc, nnc, nnnc, nnnnc, \ldots\}$ är en oändlig lista.

(b) Om försöken är oberoende skulle sannolikheten vara

$\mathbb{P}(c) =: p \in (0,1)$
$\mathbb{P}(nc) = (1-p)\cdot p$
$\mathbb{P}(nnc) = (1-p)^2 \cdot p$
$\mathbb{P}(\underbrace{nnn\ldots n}_{k \text{ stycken}}c) = (1-p)^k \cdot p$

[Även om de inte skulle vara oberoende kan inte alla grenar ha samma sannolikhet, så länge $p \notin \{0,1\}$, då det finns oändligt många och de motsvarar disjunkta händelser.
$\rightarrow \mathbb{P}(S) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(\underbrace{nn\ldots n}_{k-1 \text{ stycken}}c) = +\infty \neq 1$ ↯]

(d) $A = \{$behöver inte fler än 4 försök$\}$
$= \{c, nc, nnc, nnnc\}$

(e) OBS: alla elementarhändelser $A_k = \{$lyckas i försök $k\}$, $k \in \mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\}$ är disjunkta.
Också $B = \{$behöver minst 10 försök$\}$ och $C = \{$behöver inte fler än 8 förs.$\}$ har båda pos. sannolikhet och är disjunkta.

Ex. 1.14 en "bit" kan vara antingen 0 eller 1

(a) Hur många olika strängar med 4 bits finns det?
2 valmöjligheter i 4 positioner ger $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ olika strängar. (0000, 0001, 0010, 0100, 1000, ... 1110, 1111)

(b) Vill man ha 32 olika bit-strängar behövs det 5 bits.
($2^5 = 32$ kombinationer).

Ett tåg består av ett lok, 4 andra klass vagnar, 2 första klass och en restaurang vagn (tänk IC).
På hur många olika sätt kan vagnarna anordnas bakom loket?

Svar: $\frac{7!}{4!\cdot 2!\,1!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot \cancel{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}}{\cancel{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\cdot 2\cdot 1\cdot 1} = 7\cdot 5\cdot 3 = 105.$ (Multinom. koeff.)

- Det finns $\binom{6}{2}$ olika ordningar på vagnarna (första + andra klass) $= \frac{6\cdot 5}{2} = 15$

Sedan finns det 7 olika platser för restaurangen $\Rightarrow 7\cdot 15 = 105$ ordningar.

Ex. 1.32 Lösenord består utav 5 bokstäver följt av en siffra. engelskt alfabet har 26 olika bokstäver, och det finns 10 siffror.

(a) $26^5\cdot 10$ olika lösenord av det slaget.

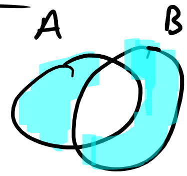
(b) Hur många lösenord består av 3 A, 2 B och en jämn siffra?

$\binom{5}{3} = \binom{5}{2}$ olika sätt att placera bokstäverna (välj platserna för antingen A eller B) och 5 jämna siffror, alltså totalt

$\binom{5}{2}\cdot 5 = \frac{5\cdot 4}{2!}\cdot 5 = 50$ olika lösenord av det slaget.

(c) Väljer man slumpvist (samma sanno för alla strängar av typ (b)) så är chansen att lyckas gissa i första försök $\frac{1}{50}$.

Ex. 2.9 A: röd lyckas, B: blå lyckas



$\mathbb{P}(A) = 0.6$, $\mathbb{P}(B) = 0.7$, $\mathbb{P}(A\cap B') = 0.18$ ← röd lyckas, blå inte

(a) slh att båda lyckas: $\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A\cap B') = 0.6 - 0.18 = 0.42.$ då $A = (A\cap B)\cup(A\cap B')$ disj.

(b) slh. att exakt en utav A och B lyckas

$\mathbb{P}((A\cap B')\cup(A'\cap B)) = \mathbb{P}(A\cap B') + \mathbb{P}(A'\cap B) = 0.18 + (0.7 - 0.42) = 0.46.$

disjunkta

$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A\cap B) + \mathbb{P}(A'\cap B)$

Ex. 2.18 A_1, A_2 händelser $\mathbb{P}(A_1) = 0.5$, $\mathbb{P}(A_2) = 0.7$

$\Rightarrow$ A_1 och A_2 är oberoende då och endast då $\mathbb{P}(A_1\cap A_2) = \mathbb{P}(A_1)\cdot\mathbb{P}(A_2) = 0.35.$

2.19 Om istället $\mathbb{P}(A_1) = 0.6$ och $\mathbb{P}(A_2) = 0.4$ samt $\mathbb{P}(A_1\cup A_2) = 0.8$

så är $\underbrace{\mathbb{P}(A_1\cup A_2)}_{0.8} = \underbrace{\mathbb{P}(A_1)}_{0.6} + \underbrace{\mathbb{P}(A_2)}_{0.4} - \mathbb{P}(A_1\cap A_2) \Rightarrow \mathbb{P}(A_1\cap A_2) = 0.2$

$\Rightarrow$ A_1 och A_2 är inte oberoende då $\mathbb{P}(A_1)\cdot\mathbb{P}(A_2) = 0.24 \neq 0.2$

Ex. 2.32: om A_1 och A_2 är disjunkta gäller

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

Är då $\mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2) > 0$ så är $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) \neq \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2)$ och därmed A_1 och A_2 beroende.