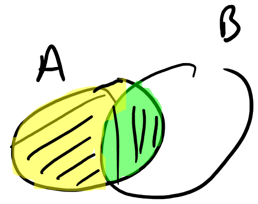
Ex. 2.37

Meddelanden krypteras med en nyckel

$A := \{$ meddelande har rätt nyckel $\}$
$B := \{$ meddelande oförändrat $\}$



$\mathbb{P}(B) = 0.95$, $\mathbb{P}(A \mid B') = 0.001$, $\mathbb{P}(A \mid B) = 1$

$\mathbb{P}(B \mid A) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = ?$

$\mathbb{P}(A \mid B') = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B')}{1 - \mathbb{P}(B)} \Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B') = 0.001 \cdot (1 - 0.95) = 0.00005$

$\mathbb{P}(A \mid B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = 1 \cdot 0.95 = 0.95$

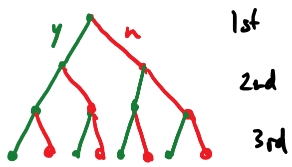
$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B') = 0.95005$

$\Rightarrow \mathbb{P}(B \mid A) = \dfrac{0.95}{0.95005} = 0.99994737\ldots$

Ex. 3.9

3 servrar oberoende av varandra, varje har slh. 0.9 att fungera.

$X =$ antal fungerande servrar



$X = 3, 2, 2, 1, 2, 1, 1, 0$

- $f(3) = \mathbb{P}(X = 3) = 1 \cdot 0.9^3 \cdot 0.1^0$
  $f(0) = \mathbb{P}(X = 0) = 1 \cdot 0.9^0 \cdot 0.1^3$
  $f(1) = \mathbb{P}(X = 1) = 3 \cdot 0.9^1 \cdot 0.1^2$
  $f(2) = \mathbb{P}(X = 2) = 3 \cdot 0.9^2 \cdot 0.1^1$

  $f(k) = \binom{3}{k} \cdot 0.9^k \cdot 0.1^{3-k}$ för $k \in \{0,1,2,3\}$

  $\Rightarrow X \sim \mathrm{Bin}(3, 0.9)$

- Beräkna $F(x) = \mathbb{P}(X \le x)$; styckvis konstant med hopp i $x = 0, 1, 2, 3$

  $F(0) = f(0) = 0.001$
  $F(1) = f(0) + f(1) = 0.028$
  $F(2) = f(0) + f(1) + f(2) = 0.271$
  $F(3) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = 1$ då $X(S) = \{0,1,2,3\}$

- $\mathbb{P}(X \ge 1) = 1 - \mathbb{P}(X < 1) = 1 - \mathbb{P}(X \le 0) = 1 - F(0) = 0.999$
- $\mathbb{P}(X \le 1) = F(1) = 0.028$.

Ex. 3.20

Låt $c \in \mathbb{R}$ och X vara en s.v.

$\mathrm{Var}(c) = \mathbb{E}(c^2) - (\mathbb{E}c)^2 =$

$\mathrm{var}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}Y)^2$ för vilken som helst s.v. Y.

$\mathrm{var}(c \cdot X) = \mathbb{E}((cX)^2) - (\mathbb{E}(cX))^2 = \mathbb{E}(c^2 X^2) - (\mathbb{E}(cX))^2 = c^2\, \mathbb{E}(X^2) - (c \cdot \mathbb{E}X)^2$

$= c^2 \cdot (\mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2) = c^2 \cdot \mathrm{var}(X)$.

Ex. 3.25 X räknar antal producerade kartonger tills en är oacceptabel (inkl. den).

(a) & (b) $f(k) = \mathbb{P}(X=k) = (0.95)^{k-1} \cdot 0.05$ för $k \in \mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$

$\Rightarrow X \sim \mathrm{Geom}(\underbrace{0.05}_{\text{parameter } p})$

succée $\hat{=}$ en kartong är oacceptabel.

(c) se föreläsning 2: $m_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = \dfrac{p e^t}{1-q e^t} = \dfrac{0.05 \cdot e^t}{1-0.95 \cdot e^t}$

(d) se föreläsning 2:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{d}{dt} m_X(t)\Big|_{t=0} = \frac{1}{p} = 20$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{d^2}{dt^2} m_X(t)\Big|_{t=0} = \frac{1+q}{p^2} = 780$$

$$\sigma^2 = \mathrm{var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2 = 780 - 20^2 = 380$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = 19.4935\dots$$

(e) $\mathbb{P}(X \geq 3) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 2) = 1 - 0.05 - 0.95 \cdot 0.05 = 0.9025$

$= 0.95 \cdot 0.95 = \mathbb{P}(\text{första kartong acceptabel}) \cdot \mathbb{P}(\text{andra kartong acceptabel})$

Ex. 3.35 Låt X ha slh.funktion $f(k) = c \cdot e^{-k}$, $k \in \mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$

$\boxed{\text{geom-}\Sigma: \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \text{ för } |q|<1}$

(a) Vilket värde har konstanten c?

$$1 = \mathbb{P}(S) = \mathbb{P}(X \in \mathbb{N}) = \sum_{k=1}^{\infty} c \cdot e^{-k} = c\left(\sum_{k=0}^{\infty} (e^{-1})^k - 1\right)$$

$$\overset{!}{=} c \cdot \left(\frac{1}{1-\frac{1}{e}} - 1\right) = c \cdot \frac{1}{e-1} \Rightarrow c = e-1$$

(b) Hitta moment genererande funktionen till X.

$$m_X(t) = \mathbb{E}\, e^{tX} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{tk} \cdot \underbrace{\mathbb{P}(X=k)}_{=f(k)} = (e-1) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (e^{t-1})^k \overset{\text{som ovan}}{=} (e-1)\left(\frac{1}{1-e^{t-1}} - 1\right) = \frac{(e-1)\, e^{t-1}}{1-e^{t-1}}$$

(c)

$$\mathbb{E}X = \frac{d}{dt} m_X(t)\Big|_{t=0} = (e-1) \frac{-1}{(1-e^{t-1})^2} \cdot (-e^{t-1} \cdot (1))\Big|_{t=0} = \frac{(e-1) \cdot e^{t-1}}{(1-e^{t-1})^2}\Big|_{t=0} = \frac{1-\frac{1}{e}}{(1-\frac{1}{e})^2}$$

$$= \frac{e\cancel{(e-1)}}{(e-1)^{\cancel{2}}} = \frac{e}{e-1}$$

OBS: $f(k) = (e-1) \cdot e^{-k} = \left(\frac{e-1}{e}\right) \cdot e^{-(k-1)} = \underbrace{\left(1-\frac{1}{e}\right)}_{p} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{e}\right)}_{1-p}^{k-1} \Rightarrow X \sim \mathrm{Geom}(\overset{p}{1-\tfrac{1}{e}})$, alltså t.ex.

$$\mathbb{E}X = \frac{1}{p} = \frac{1}{1-\frac{1}{e}} = \frac{e}{e-1}$$

Ex. 3.46 $Y \sim \mathrm{Bin}(n,p)$ för okända $n \in \mathbb{N}$, $p \in (0,1)$

$\mathbb{E}Y = 5 = n \cdot p$, $\mathrm{var}(Y) = 4 = n \cdot p \cdot (1-p)$

$1-p = \dfrac{\mathrm{var}(Y)}{\mathbb{E}Y} = \dfrac{4}{5} \Rightarrow p = \dfrac{1}{5}$, $n = \dfrac{\mathbb{E}Y}{p} = 25$

Ex. 3.42 20 försök, oberoende, "succée"-sannolikhet $p = 0.1$

Om X räknas antalet så är $X \sim \mathrm{Bin}(20, 0.1)$

(a) $\mathbb{P}(X=0) = 0.9^{20} = 0.12157\ldots$

(b) $\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X=0) = 0.87842\ldots$

(c) $\mathbb{P}(X > 4) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 4) = 1 - F(4) \approx 1 - 0.9568 = 0.0432$

tabell i boken

→ jepp, ganska osannolikt.

Ex. 3.43 $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$ $\qquad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

(a) $m_X(t) = \mathbb{E}\, e^{tX} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \cdot e^{tk} = (p \cdot e^t + 1-p)^n$

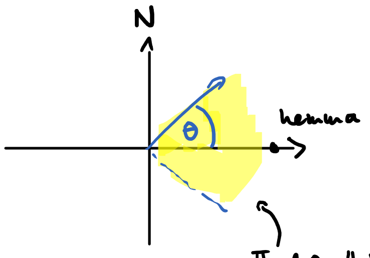
(b) $m'_X(t) = n \cdot (p \cdot e^t + 1-p)^{n-1} \cdot (p \cdot e^t) \Rightarrow \mathbb{E}X = m'_X(0) = n \cdot (p + 1 - p)^{n-1} \cdot p \cdot 1 = np$

(c) $m''_X(t) = np\left[e^t (p \cdot e^t + 1-p)^{n-1} + e^t (n-1) \cdot (p e^t + 1-p)^{n-2} (p \cdot e^t)\right]$

$\mathbb{E}X^2 = m''_X(0) = np\left[1 \cdot (p+1-p)^{n-1} + 1 \cdot (n-1)(p+1-p)^{n-2}(p \cdot 1)\right] = np + n(n-1)p^2$

(d) $\mathrm{var}(X) = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = n^2p^2 - np^2 + np - (np)^2 = n \cdot p(1-p).$

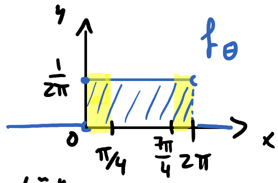
Ex. 4.6 Duva i konstgjort magnetfält flyger åt slumpvis vald riktning θ.
(eng. dove/pigeon)



Antar att $\theta \sim \text{unif}(0, 2\pi)$.

(a) Bestäm täthetsfunktionen:

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & \text{om } x \in [0, 2\pi) \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$



(b) Ser varför den också kallas "rektangulär".

$\leq \frac{\pi}{4}$ ifrån "rätt" motsvarar $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{7\pi}{4}, 2\pi)$

(c) den gula arean i bilden till höger

är $\frac{\cancel{\pi}}{4} \cdot \frac{1}{2\cancel{\pi}} \cdot 2 = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(\theta \in [0, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{7\pi}{4}, 2\pi))$

(d) $\mathbb{P}(\theta \in [0, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{7\pi}{4}, 2\pi)) = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2\pi} \, dt + \int_{\frac{7\pi}{4}}^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \, dt = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$

(e) Låt X räkna antalet duvor utav 10 som flyger iväg inom den gula sektorn (oberoende) $\Rightarrow X \sim \text{Bin}(10, \frac{1}{4})$

$\mathbb{P}(X \geq 7) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 6) \overset{\text{tabell i boken}}{\doteq} 1 - 0.9965 = 0.0035$

Måste utgå ifrån att modellen inte lämpar sig om detta inträffar!

Ex. 4.13 $f(x) = \frac{1}{x \cdot \ln 2}$ för $x \in [25, 50]$, 0 annars täthetsfkt. till X.

för $y \in [25, 50]$: $\int_{25}^{y} f(x) \, dx = \left[\frac{\ln x}{\ln 2}\right]_{25}^{y} = \frac{\ln(\frac{y}{25})}{\ln 2}$

$\Rightarrow F(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 25 \\ \frac{1}{\ln 2} \ln(\frac{y}{25}) & \text{för } y \in [25, 50] \\ 1 & y \geq 50 \end{cases}$; $\mathbb{P}(30 \leq X \leq 40) = F(40) - F(30) = \frac{1}{\ln 2} \cdot \ln(\frac{4}{3}) \approx 0.415$.

Ex. 4.15 X en s.v. med täthetsfunktion $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{6} & \text{för } x \in [2, 4] \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$

(b) $\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot x^2 \, dx$

$= \int_2^4 \frac{x}{6} \cdot x^2 \, dx = \left[\frac{x^4}{24}\right]_2^4 = 10$

$\mathbb{E}(X) = \int_2^4 \frac{x}{6} \cdot x \, dx = \left[\frac{x^3}{18}\right]_2^4 = \frac{28}{9}$

$\text{var}(X) = \sigma^2 = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2 = \frac{26}{81}$, $\sigma = 0.56577\ldots$

Ex. 4.42 / 4.52 sparas till nästa gång!