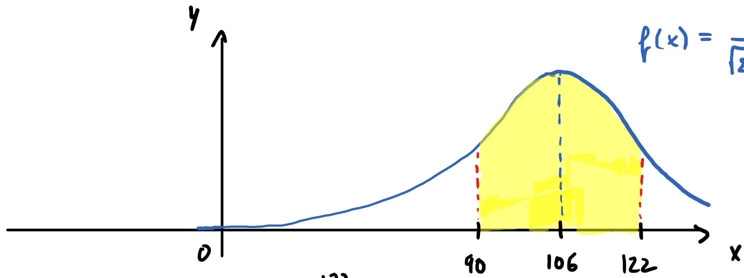
Ex. 4.42 X är normalfördelad med $\mu = 106$ och $\sigma = 8$ (i $\frac{mg}{100\,ml}$ glucose)

dvs. $X \sim \mathcal{N}(106, 64)$.

(a)



$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 8} \exp\left(-\frac{(x-106)^2}{64}\right)$$

$$\mathbb{P}(X \in [90,122]) = \int_{90}^{122} f(x)\,dx \underset{\text{symmetri}}{=} 2\cdot \int_{106}^{122} f(x)\,dx = 2\cdot \mathbb{P}(X\in[106,122])$$

Vi vet att $Y := \frac{X-106}{8} \sim \mathcal{N}(0,1)$ (jfr. föreläsning 3)

$$\mathbb{P}(X\in[106,122]) = \mathbb{P}\left(\frac{X-106}{8}\in[0,2]\right) = \mathbb{P}(Y\in[0,2]) \overset{\text{tabell V (s.697)}}{=} F(2)-F(0)$$
$$\approx 0.9772 - 0.5 = 0.4772$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(X\in[90,122]) = 2\cdot 0.4772 = 0.9544$$

(b) $\mathbb{P}(X\le 120) = \mathbb{P}\left(\frac{X-106}{8} \le \frac{120-106}{8}\right) = \mathbb{P}(Y \le \frac{7}{4}) = F(1.75) = 0.9599$

(c) $\mathbb{P}(X \le C_1) = 0.25$ för vilket $c \in \mathbb{R}$?

Tabellen avslöjar att $\mathbb{P}(Y\le c) = 0.25$ för $c \approx -0.675$ ungefär.

$$\mathbb{P}(\underset{\frac{X-106}{8}}{\underbrace{Y}} \le c) = \mathbb{P}(X \le 8c+106) = 0.25 \quad \text{— " —}$$

alltså $C_1 = 8\cdot c + 106 = 100.6$ dvs. $\mathbb{P}(X\le 100.6) = 0.25$.

(d) $\mathbb{P}(X>130) = 1-\mathbb{P}(X\le 130) = 1-\mathbb{P}(Y \le \frac{130-106}{8}) = 1-F(3)$

$\overset{\text{tabell}}{=} 1-0.9987 = 0.0013$

→ Vi ska vara oroliga då det är ett extremfall!

Ex 4.52 **Sats:** $\text{Bin}(n,p)$ kan approximeras med $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ där

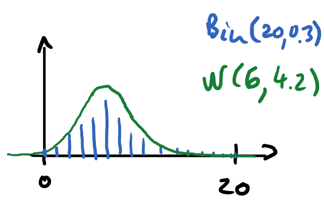
$\mu = n\cdot p$; $\sigma^2 = n\cdot p\cdot \underset{q}{\underbrace{(1-p)}}$ (alltså samma väntevärde och varians)

så länge $\min\{n\cdot p,\, n\cdot q\} \ge 5$.

Här: $n=20$, $p=0.3$ ($\rightarrow \min\{np, nq\} = 0.3\cdot 20 = 6 > 5$)

Vi approximeras nu alltså $\text{Bin}(20, 0.3)$ med $\mathcal{N}(6, 4.2)$

Låt $X \sim \text{Bin}(20, 0.3)$ och $Y \sim \mathcal{N}(6,4.2)$



(a) $0.1071 \underset{\text{s.691}}{\overset{\text{tabell I}}{=}} \mathbb{P}(X\le 3) \overset{\mathbb{P}(X\in\mathbb{N}_0)=1}{=} \mathbb{P}(X \le 3.5)$ (man "interpolerar")

$$\approx \mathbb{P}(Y\le 3.5) = \mathbb{P}\Big(\underset{=:Z\sim\mathcal{N}(0,1)}{\underbrace{\frac{Y-6}{\sqrt{4.2}}}} \le \frac{3.5-6}{\sqrt{4.2}}\Big) \approx F(-1.22)$$
$$= 0.1112$$

(b) $\underbrace{0.6080 - 0.0355}_{=0.5725} \overset{\text{tab. I}}{=} \mathbb{P}(X \le 6) - \mathbb{P}(X \le 2) = \mathbb{P}(X \in [3,6]) = \mathbb{P}(2.5 < X \le 6.5) =$

$= \mathbb{P}\left(\frac{2.5-6}{\sqrt{4.2}} < Z \le \frac{6.5-6}{\sqrt{4.2}}\right) \approx F(0.24) - F(-1.71) = 0.5948 - 0.0436 = 0.5512$

(c) $\underbrace{1 - 0.1071}_{=0.8929} \overset{\text{tab. I}}{=} \mathbb{P}(X \ge 4) = \mathbb{P}(X > 3.5) = 1 - \mathbb{P}\left(Z \le \frac{3.5-6}{\sqrt{4.2}}\right) = 1 - F(-1.22) \simeq 0.8888$

(d) $\underbrace{0.2375 - 0.1071}_{=0.1304} = \mathbb{P}(X \le 4) - \mathbb{P}(X \le 3) = \mathbb{P}(X = 4)$

$\mathbb{P}(X \in (3.5, 4.5]) = \mathbb{P}\left(\frac{3.5-6}{\sqrt{4.2}} < Z \le \frac{4.5-6}{\sqrt{4.2}}\right)$

$\approx F(-0.73) - F(-1.22) = 0.2327 - 0.1112 = 0.1215.$

där F betecknas fördelningsfunktionen till $\mathcal{N}(0,1)$.

Ex. 3.57 $N = 20$ chips, $r = 3$ utav dessa är defekta
$n = 5$ används i en dator

(a) Bestäm sannolikhetsfunktionen för X, antalet defekta, installerade chips.

$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{3}{k}\binom{20-3}{5-k}}{\binom{20}{5}}$ för $\underbrace{\max\{0, 5-17\}}_{=0} \le k \le \underbrace{\min\{3,5\}}_{=3}$ dvs. $k = 0,1,2,3$

0 annars.

$\rightarrow$ X är hypergeometriskt fördelat med parametrar $(N, r, n) = (20, 3, 5)$

(b) $\mathbb{E}(X) = \frac{nr}{N} = \frac{5 \cdot 3}{20} = \frac{3}{4}$, $\operatorname{var}(X) = \frac{nr(N-n)(N-r)}{(N-1)N^2} = \frac{5 \cdot 3 \cdot 15 \cdot 17}{19 \cdot 20^2} \approx 0.50329.$

(c) $\mathbb{P}(X = 0) = \frac{\binom{3}{0}\binom{17}{5}}{\binom{20}{5}} = \frac{\frac{17!}{\cancel{5!}\,12!}}{\frac{20!}{\cancel{5!}\,15!}} = \frac{17!}{20!} \cdot \frac{15!}{12!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{20 \cdot 19 \cdot 18} \approx 0.3991.$

(d) $\mathbb{P}(X \ge 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) = 0.6009$

Ex. 3.62 Atom reaktorn släpper ut radioaktiva gaser,
i genomsnitt 2 ggr per månad. Utsläppen sker oberoende av varandra.

Alltså X, antalet utsläpp inom 3 månader är Poiss$(\overset{\lambda}{6})$ (med intensitet $\lambda = \frac{2 \text{ ggr}}{\text{månad}} = \frac{6 \text{ ggr.}}{3 \text{ månader}}$)

- $\mathbb{E}X = \lambda = 6$
- $\mathbb{P}(X \ge 12) = 1 - \mathbb{P}(X \le 11) \overset{\text{tab. II, 5.692}}{=} 1 - 0.980 = 0.02$ mycket osannolikt!

Ex. 3.64 I genomsnitt en jordbävning med förstörande effekt
Dessa kommer oberoende av varandra.

tidsenhet: 6 månader, vilket gör $\lambda = 0.5$

X räknar antalet sådana händelser per halvår $\Rightarrow X \sim \text{Poiss}(0.5)$

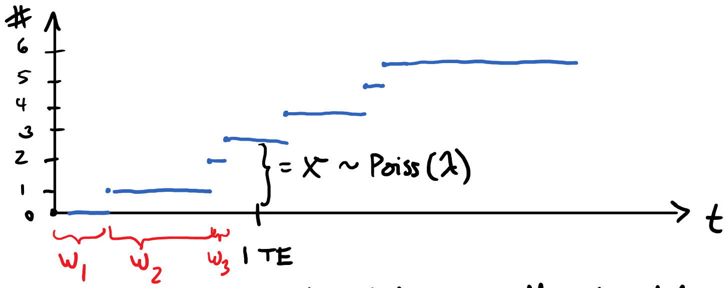
- $\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X=0) = 1 - 0.607 = 0.393.$

  $\mathbb{P}(X=0) = e^{-\lambda} = e^{-\frac{1}{2}}$ (eller tab. II)

- $\mathbb{P}(X \geq 3) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 2) \overset{\text{tab. II}}{=} 1 - 0.986 = 0.014$
  $\rightarrow$ ganska osannolikt.

Ex. 4.37 Vad är sannolikheten att första stora jordbävning inte händer i de första tre månaderna?

Låt Y vara antalet stora jordbävningar inom $\underbrace{\text{3 månader}}_{\hat{=}\text{ 1 tidsenhet}} \rightsquigarrow Y \sim \text{Poiss}(\overset{=\lambda}{\tfrac{1}{4}})$.



- Processen som räknar händelser på tidslinjen kallas Poissonprocess (förutsättningar är att antalet händelser är Poiss(λ) för en tidsenhet (TE) och oberoende för disjunkta tidsintervall).

- <u>Sats 4.3.3</u>: Väntetiderna mellan händelser (eller från en fast tidpunkt, t.ex. t=0 till nästa händelse) är Exp(λ) fördelade. minneslöshet av Exp!

<u>Observera</u>: Boken väljer parameter β för exponentialfördelningen, som motsvarar $\frac{1}{\lambda}$ i vår notation. Täthetsfunktionen är i vilket fall: $f(x) = \frac{1}{\beta}\exp\left(-\frac{x}{\beta}\right) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}$ för $x > 0$.

$\mathbb{P}$(ingen händelse inom de första 3 månader)

$$= \mathbb{P}(W_1 > 1\,(\text{TE})) = \underbrace{\int_1^\infty \lambda e^{-\lambda x}\,dx}_{= \mathbb{P}(W_1 > 1) \text{ där } W_1 \sim \text{Exp}(\frac{1}{4})} = \left[-e^{-\lambda}\right]_1^\infty = e^{-\lambda} = e^{-\frac{1}{4}} \approx 0.7788$$

<u>Alternativt</u> motsvarar

$\mathbb{P}(W_1 > 1\,(\text{TE})) = \mathbb{P}(Y = 0)$, där Y räknar antalet stora jordbävningar i första 3 månaderna ($\hat{=}$ 1 TE).

$\mathbb{P}(Y=0) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^0}{0!} = e^{-\frac{1}{4}}$ som ovan.

Ex. 4.87

Beräkna $\mathbb{E}(\overbrace{X^2+3X+2}^{H(X)}) = \mathbb{E}(X^2)+3\cdot\mathbb{E}X+2$ för

(a) $X \sim \mathcal{N}(3,4) \to \mathbb{E}X=3,\ 4 = \mathrm{var}(X) = \mathbb{E}(X^2)-(\mathbb{E}X)^2 \rightsquigarrow \mathbb{E}(X^2)=4+(3)^2=13$

$\to \mathbb{E}(H(X)) = 13 + 3\cdot 3+2 = 24$

(b) $X \sim \Gamma(\alpha,\beta)$ har täthetsfunkt. $f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}$, $x>0$ där

$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty z^{\alpha-1} e^{-z}\,dz$

$$\Rightarrow \mathbb{E}X = \int_0^\infty x\cdot f(x)\,dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{\beta^\alpha} e^{-x/\beta}\,dx \underset{\substack{z=\frac{x}{\beta}\\ dz=\frac{1}{\beta}dx}}{\overset{\text{Subst.}}{=}} \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} \underbrace{\int_0^\infty z^\alpha e^{-z}\,dz}_{=\Gamma(\alpha+1)=\alpha\cdot\Gamma(\alpha)}$$

$$= \beta\cdot\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)} = \alpha\beta$$

$$\mathbb{E}X^2 = \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty \frac{x^{\alpha+1}}{\beta^{\alpha+1}} e^{-\frac{x}{\beta}}\,dx \overset{\text{Subst.}}{=} \frac{\beta^2}{\Gamma(\alpha)}\Gamma(\alpha+2) = (\alpha+1)\cdot\alpha\cdot\beta^2$$

$$\Rightarrow \mathrm{var}(X) = \mathbb{E}X^2-(\mathbb{E}X)^2 = (\alpha^2+\alpha)\beta^2-\alpha^2\beta^2 = \alpha\beta^2.$$

För $X\sim\Gamma(2,4)$ får vi därmed $\mathbb{E}X = 2\cdot 4 = 8$, $\mathrm{var}(X) = 2\cdot 4^2 = 32$
och $\mathbb{E}X^2 = 3\cdot 2\cdot 4^2 = 96$

$\Rightarrow \mathbb{E}(H(X)) = 96+3\cdot 8+2 = 122.$

(c) $X \sim \chi^2(10) = \Gamma(\frac{10}{2},2)$ då $\chi^2(\gamma) = \Gamma(\frac{\gamma}{2},2)$

$\Rightarrow \mathbb{E}X = 10$, $\mathrm{var}(X) = 20$, $\mathbb{E}X^2 = 120$, $\mathbb{E}(H(X)) = 120+3\cdot 10+2 = 152.$

(d) $X\sim \underbrace{\mathrm{Exp}(\tfrac{1}{5})}_{=\Gamma(1,5)}$ (som ovan: $\beta=5$ i boken motsvarar $\lambda=\frac{1}{\beta}=\frac{1}{5}$)

$= \Gamma(1,5)$; $\mathbb{E}X = \beta = \frac{1}{\lambda} = 5$, $\mathrm{var}(X) = \beta^2 = \frac{1}{\lambda^2} = 25$, $\mathbb{E}X^2 = 50$

$\Rightarrow \mathbb{E}(H(X)) = 50+3\cdot 5+2 = 67.$