Ex. 5.2

(a) X hypergeometrisk fördelad med parametrar $(\overset{N}{7}, \overset{r}{3}; \overset{n}{4})$

$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{\binom{r}{k}\binom{N-r}{n-k}}{\binom{N}{n}} \qquad \text{för} \quad \max\{0, n-(N-r)\} \le k \le \min\{r,n\}$$

här: $$\mathbb{P}(X=k) = \frac{\binom{3}{k}\binom{4}{4-k}}{\binom{7}{4}} \qquad \text{för} \quad 0 \le k \le 3$$

t.ex. $$\mathbb{P}(X=2) = \frac{\binom{3}{2}\binom{4}{2}}{\binom{7}{4}} = \frac{3 \cdot \frac{4\cdot 3}{2\cdot 1}}{\frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1}} = \frac{216}{420} = \frac{18}{35}$$

(b) Marginella slh funktioner

$x \backslash y$	0	1	2	3	4	f_X	
0	0	0	0	0	1/35	1/35	$= \mathbb{P}(X=0)$
1	0	0	0	12/35	0	12/35	
2	0	0	18/35	0	0	18/35	
3	0	4/35	0	0	0	4/35	$= \mathbb{P}(X=3)$
f_Y	0	4/35	18/35	12/35	1/35		

$\mathbb{P}(Y=1) = 4/35$

Y är hypergeometrisk fördelad med parametrar $(7, \overset{r}{4}; 4)$

[Faktiskt är $Y = 4 - X$]

(c) Känsla: "mycket beroende" i meningen att kunskap om värdet på X lägger fast värdet på Y (och tvärtom).

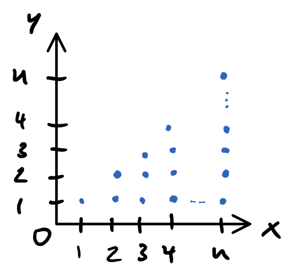
t.ex. $\mathbb{P}(X=0, Y=1) = 0 \neq \mathbb{P}(X=0)\cdot\mathbb{P}(Y=1) = \frac{1}{35}\cdot\frac{4}{35}$.

Ex. 5.4

OBS: (X,Y) är diskret i denna uppgift med slh. funktion

$$f_{XY}(x,y) = \frac{2}{n(n+1)} \qquad \text{för alla } x,y \in \mathbb{N} \text{ med } 1 \le y \le x \le n$$

[(X,Y) är likformig fördelad på alla blåa punkter i skissen till höger]



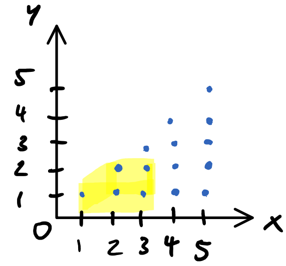
(a) Tydligen $f_{XY}(x,y) \ge 0$.

$$\sum_{x,y\in\mathbb{N}} f_{XY}(x,y) = \sum_{x=1}^{n}\sum_{y=1}^{x} \frac{2}{n(n+1)} = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{x=1}^{n} \overbrace{\sum_{y=1}^{x} 1}^{=x}$$

$$= \frac{2}{n(n+1)} \sum_{x=1}^{n} x = \frac{2}{n(n+1)} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = 1.$$

(b) $\underbrace{\mathbb{P}(X=k)}_{f_X(k)} = k \cdot \frac{2}{n(n+1)}$ för $1 \le k \le n$

$f_Y(k) = \mathbb{P}(Y=k) = (n-k+1)\frac{2}{n(n+1)}$ för $1 \le k \le n$



(c) X,Y oberoende ?

$\mathbb{P}(X=1, Y=2) = 0 \neq \mathbb{P}(X=1)\cdot\mathbb{P}(Y=2) = \left(\frac{2}{n(n+1)}\right)^2 \cdot (n-1)$ inte oberoende!

(d) $n=5$: $\mathbb{P}(X \le 3, Y \le 2) = 5 \cdot \frac{2}{n(n+1)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$\mathbb{P}(X \le 3) = 6 \cdot \frac{2}{n(n+1)} = \frac{2}{5}$

$\mathbb{P}(Y \le 2) = 9 \cdot \frac{2}{n(n+1)} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$

Ex. 5.10 (X,Y) kont. ; $f_{XY}(x,y) = \frac{x^3y^3}{16}$ för $x,y \in [0,2]$

(a) $f_X(x) = \int_{y=0}^{2} \frac{x^3y^3}{16}\,dy = \frac{x^3}{16}\left[\frac{y^4}{4}\right]_0^2 = \frac{x^3}{4}$ för $x \in [0,2]$

$f_Y(y) = \frac{y^3}{4}$ för $y \in [0,2]$ (symmetri)

(b) Yep. X,Y är oberoende: $f_{XY}(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y)$ för alla $x,y \in \mathbb{R}$.

(c) $\mathbb{P}(X \le 1) = \int_0^1 f_X(x)\,dx = \int_0^1 \frac{x^3}{4}\,dx = \left[\frac{x^4}{16}\right]_0^1 = \frac{1}{16}$

(d) Givet $Y \le 1$ vad är slh. för $X \le 1$, alltså $\mathbb{P}(X \le 1 \mid Y \le 1]$?

$\mathbb{P}[X \le 1 \mid Y \le 1] \underset{X,Y \text{ oberoende}}{\overset{?}{=}} \frac{\mathbb{P}(X\le 1)\,\mathbb{P}(Y \le 1)}{\mathbb{P}(Y \le 1)} = \mathbb{P}(X \le 1) = \frac{1}{16}$.

Ex. 5.15 tillbaka till Ex. 5.2 (Hypgeo (N,r,n) har väntevärde $\frac{nr}{N}$)

(a) $\mathrm{Cov}(X,Y)$ borde vara >0 eller <0 ? (ju större X desto mindre Y)

(b) Beräkna $\mathbb{E}X = \frac{4\cdot 3}{7} = \frac{12}{7}$, $\mathbb{E}Y = \frac{4\cdot 4}{7} = \frac{16}{7}$

$\mathbb{E}[X\cdot Y] = \cancel{0\cdot 4\cdot \mathbb{P}(X=0,Y=4)} + 1\cdot 3\cdot\mathbb{P}(X=1,Y=3) + 2\cdot 2\cdot \mathbb{P}(X=2,Y=2) + 3\cdot 1\cdot \mathbb{P}(X=3,Y=1)$

$= 3\cdot\frac{12}{35} + 4\cdot\frac{18}{35} + 3\cdot\frac{4}{35} = \frac{24}{7}$

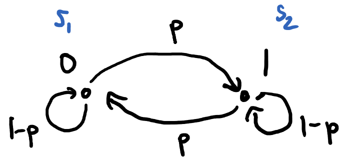
och $\mathrm{cov}(X,Y) = \mathbb{E}((X-\mathbb{E}X)(Y-\mathbb{E}Y)) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}X\cdot\mathbb{E}Y = \frac{24}{7} - \frac{192}{49} = -\frac{24}{49} \approx -0.4898$

Ex. 5.25 $\mathrm{var}(X+Y) = \mathbb{E}[(X+Y-\mathbb{E}(X+Y))^2] = \mathbb{E}[(X+Y)^2 - 2(X+Y)\cdot\mathbb{E}(X+Y) + (\mathbb{E}(X+Y))^2]$

$= \mathbb{E}X^2 + 2\mathbb{E}(XY) + \mathbb{E}Y^2 - (\mathbb{E}(X+Y))^2 = \mathbb{E}X^2 + 2\mathbb{E}(XY) + \mathbb{E}Y^2 - (\mathbb{E}X)^2 - 2\mathbb{E}X\,\mathbb{E}Y - (\mathbb{E}Y)^2$

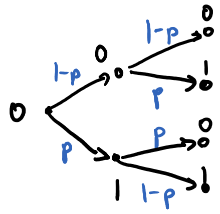
$= \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 + \mathbb{E}Y^2 - (\mathbb{E}Y)^2 + 2(\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}X\,\mathbb{E}Y) = \mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(Y) + 2\,\mathrm{cov}(X,Y)$.

GS <u>Ex. 11.1.8</u>



MK med övergångsmatris $\quad P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{pmatrix}$

<u>Ex. 11.1.9</u>



$$\mathbb{P}(X^{(1)} = 0, X^{(2)} = 0 \mid X^{(0)} = 0) = (1-p)^2 < p_{00}^{(2)}$$

(då $0 \to 1 \to 0$ är också möjligt)

För $p = 0.1$: ska man beräkna $P_{0.1}^{100} = \begin{pmatrix} 0.500 & 0.500 \\ 0.500 & 0.500 \end{pmatrix}$, där $P_{0.1} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}$

$p = 0.2$: $\quad P_{0.2}^{100} = \begin{pmatrix} 0.500 & 0.500 \\ 0.500 & 0.500 \end{pmatrix}$, där $P_{0.2} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$

$$P^n \to \Pi = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 \\ \pi_1 & \pi_2 \end{pmatrix} \quad \text{för en reguljär MK}$$

- om det finns en stationär fördelning, alltså en slh. vektor π som uppfyller $\pi = \pi \cdot P$, då är varje rad i Π lika med π.
- För en symmetrisk kedja är den likformiga fördelningen $\pi = (\frac{1}{r}, \dots, \frac{1}{r})$ stationär.

<u>Ex. 11.1.19</u>

U = väljer mynt med 2x heads
F = väljer symmetrisk mynt med heads/tails

$$\mathbb{P}(U) = \mathbb{P}(F) = \frac{1}{2}.$$

Låt $X^{(n)}$ vara utfallet i omgång n.

(a) $$\mathbb{P}(X^{(n+1)} = H \mid X^{(n)} = H) = \frac{\mathbb{P}(X^{(n)} = X^{(n+1)} = H)}{\mathbb{P}(X^{(n)} = H)}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X^{(n)} = H) &= \mathbb{P}(\{X^{(n)} = H\} \cap U) + \mathbb{P}(\{X^{(n)} = H\} \cap F) \\ &= \underbrace{\mathbb{P}(X^{(n)} = H \mid U)}_{=1} \cdot \underbrace{\mathbb{P}(U)}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\mathbb{P}(X^{(n)} = H \mid F)}_{=\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\mathbb{P}(F)}_{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(X^{(n)} = X^{(n+1)} = H) = \underbrace{\mathbb{P}(X^{(n)} = X^{(n+1)} = H \mid U)}_{=1} \cdot \underbrace{\mathbb{P}(U)}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\mathbb{P}(X^{(n)} = X^{(n+1)} = H \mid F)}_{=\frac{1}{4}} \cdot \underbrace{\mathbb{P}(F)}_{\frac{1}{2}} = \frac{5}{8}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(X^{(n+1)} = H \mid X^{(n)} = H) = \frac{5/8}{3/4} = \frac{5}{6}$$

(b) På samma sätt:

$$\mathbb{P}(X^{(n)}=T, X^{(n+1)}=T) = \underbrace{\mathbb{P}(X^{(n)}=T, X^{(n+1)}=T \mid U)}_{=0} \cdot \mathbb{P}(U) + \underbrace{\mathbb{P}(X^{(n)}=T, X^{(n+1)}=T \mid F)}_{=\frac{1}{4}} \cdot \underbrace{\mathbb{P}(F)}_{=1/2} = \frac{1}{8}$$

Med $\mathbb{P}(X^{(n)}=T) = 1-\mathbb{P}(X^{(n)}=H) = \frac{1}{2}$ följer

$$\mathbb{P}(X^{(n+1)}=T \mid X^{(n)}=H) = 1-\mathbb{P}(X^{(n+1)}=H \mid X^{(n)}=H) = \frac{1}{6}$$

$$\mathbb{P}(X^{(n+1)}=T \mid X^{(n)}=T) = \frac{1/8}{1/4} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(X^{(n+1)}=H \mid X^{(n)}=T) = 1-\mathbb{P}(X^{(n+1)}=T \mid X^{(n)}=T) = \frac{1}{2}$$

rimligt, då $X^{(n)}=T$ garanterar att hon kastar det "vanliga" myntet, där $X^{(n+1)}$ och $X^{(n)}$ är oberoende!

övergångssannolikheterna blir då alltså sammantaget

$$\begin{array}{c|cc} & H & T \\ \hline H & & \\ T & & \end{array} \quad \begin{pmatrix} 5/6 & 1/6 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

(c) $\mathbb{P}(X^{(n+1)}=X^{(n)}=X^{(n-1)}=H)$

$$= \underbrace{\mathbb{P}(X^{(n+1)}=X^{(n)}=X^{(n-1)}=H \mid U)}_{=1} \cdot \underbrace{\mathbb{P}(U)}_{=1/2} + \underbrace{\mathbb{P}(X^{(n+1)}=X^{(n)}=X^{(n-1)}=H \mid F)}_{=(\frac{1}{2})^3=\frac{1}{8}} \cdot \underbrace{\mathbb{P}(F)}_{=1/2}$$

$= \frac{9}{16}$. Med $\mathbb{P}(X^{(n)}=X^{(n-1)}=H) = \frac{5}{8}$ (se (a)) följer

$$\mathbb{P}(X^{(n+1)}=H \mid X^{(n)}=X^{(n-1)}=H) = \frac{9/16}{5/8} = \frac{9}{10} \quad (\text{för } n \geq 2)$$

(d) Nej, ingen Markov kedja

i ord: utfallen (H, T) ger information om vilket mynt vår kompis valde från början (ju fler utfall, desto mer info; en gång T avslöjar allt t.ex.) På så sätt påverkar historien framtida fördelningar.

i siffror: För en MK skulle $\mathbb{P}(X^{(n+1)}=H \mid X^{(n)}=X^{(n-1)}=H) = \mathbb{P}(X^{(n+1)}=H \mid X^{(n)}=H)$.

"inte dåtiden, bara nuet påverkar morgondagens fördelning"

Men här är det $\frac{9}{10} \neq \frac{5}{6}$.

[Ju fler utfall som var H desto mer sannolikt att hon faktiskt kastar dubbel-heads myntet, desto större sannolikhet att det blir heads också i nästa omgång.]