



MVE051/MSG810 - Statistik och diskret
matematik (LP4 2022-2023)
Chalmers och Göteborgs universitet

Föreläsning 13 – Chebyshev's olikhet och de stora talens lag

May 11, 2023

Dagens föreläsning

- Mer om momentgenererande funktioner
 - Bevis av CLT
- Markovs olikhet
- Chebyshevs olikhet
 - Bevis av de stora talens lag

Momentgenererande funktioner

Moment

Om X är en stokastisk variabel så ges det k :e momentet till X av

$$\mathbb{E}[X^k]$$

Momentgenerande funktion

$$m_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k X^k}{k!}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[X^k] \frac{t^k}{k!}$$

Sats

Om $m_X(t)$ finns för t nära 0 så är

$$\mathbb{E}[X^k] = m_X^{(k)}(0) = \frac{d^k}{dx^k} m_X(t) \big|_{t=0}$$

Momentgenererande funktioner

Exempel

Vi har tidigare visat att om $X \sim \text{bin}(n, p)$ så är

$m_X(t) = ((1-p) + pe^t)^n$. Vi får

$$m'_X(t) = npe^t((1-p) + pe^t)^{n-1}$$

$$m''_X(t) = n(n-1)p^2e^{2t}((1-p) + pe^t)^{n-2} + npe^t((1-p) + pe^t)^{n-1}$$

och alltså

- $\mathbb{E}[X] = m'_X(0) = np$
- $\mathbb{E}[X^2] = m''_X(0) = n(n-1)p^2 + np$
- $\text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \underbrace{n(n-1)p^2 + np}_{\mathbb{E}[X^2]} - \underbrace{n^2p^2}_{\mathbb{E}[X]^2} = np(1-p)$

Momentgenererande funktioner

Exempel

Låt $Z \sim N(0, 1)$ så att $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$. Vi får

$$\begin{aligned} m_Z(t) &= \mathbb{E}[e^{tZ}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tz} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2+tz} dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(z^2-2tz)/2} dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-((z-t)^2-t^2)/2} dz \\ &= e^{-t^2/2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(z-t)^2/2} dz}_{\text{pdf för } N(t,1)} = e^{-t^2/2} \end{aligned}$$

Momentgenererande funktioner

Om X är en stokastisk variabel och $Y = aX + b$ så är

$$m_Y(t) = \mathbb{E}[e^{tY}] = \mathbb{E}[e^{t(aX+b)}] = \mathbb{E}[e^{atX+bt}] = e^{bt}\mathbb{E}[e^{atX}] = e^{bt}m_X(at)$$

Sats

Om X är en stokastisk variabel och $Y = aX + b$ så är

$$m_Y(t) = e^{bt}m_X(at)$$

Exempel

Låt $X \sim N(\mu, \sigma)$. Då är $X = \sigma Z + \mu$, så vi får

$$m_X(t) = e^{\mu t}m_Z(\sigma t) = e^{\mu t}e^{(\sigma t)^2/2} = e^{\mu t + \sigma^2 t^2/2}.$$

Momentgenererande funktioner

Om X och Y är oberoende så är e^{tX} och e^{tY} oberoende, och därför gäller att

$$m_{X+Y}(t) = \mathbb{E}[e^{t(X+Y)}] = \mathbb{E}[e^{tX}e^{tY}] = \mathbb{E}[e^{tX}]\mathbb{E}[e^{tY}] = m_X(t)m_Y(t).$$

Sats

Om X och Y är oberoende så är

$$m_{X+Y}(t) = m_X(t)m_Y(t).$$

Momentgenererande funktioner

Sats

Låt X och Y vara två stokastiska variabler. Om det finns ett intervall $I = (-a, a)$ sådant att $m_X(t) = m_Y(t)$ för alla $t \in I$ så har X och Y samma fördelning.

Momentgenererande funktioner

Exempel

Om $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1)$ och $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2)$ är oberoende, så är

$$\begin{aligned} m_{X_1+X_2}(t) &= m_{X_1}(t)m_{X_2}(t) = e^{\mu_1 t + \sigma_1^2 t^2/2} e^{\mu_2 t + \sigma_2^2 t^2/2} \\ &= e^{(\mu_1 + \mu_2)t + (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)t^2/2} \end{aligned}$$

Låt $Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$. Då gäller att

$$m_Y(t) = e^{(\mu_1 + \mu_2)t + (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)t^2/2}$$

Enligt satsen har Y och $X_1 + X_2$ samma fördelning, dvs.

$$X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$$

Momentgenererande funktioner

Exempel

Låt $X_1 \sim \text{Poisson}(\lambda_1)$ och $X_2 \sim \text{Poisson}(\lambda_2)$ vara oberoende, och låt $Y \sim \text{Poisson}(\lambda_1 + \lambda_2)$. Då är

$$\begin{aligned} m_{X_1}(t) &= \mathbb{E}[e^{tX_1}] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk} \cdot \frac{e^{-\lambda_1} \lambda_1^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_1} (\lambda_1 e^t)^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda_1} e^{\lambda_1 e^t} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_1 e^t} (\lambda_1 e^t)^k}{k!}}_{\text{pdf för Poisson}(\lambda_1 e^t)} = e^{\lambda_1(e^t - 1)}, \end{aligned}$$

$$m_{X_2}(t) = e^{\lambda_2(e^t - 1)}$$

$$m_{X_1+X_2}(t) = m_{X_1}(t)m_{X_2}(t) = e^{\lambda_1(e^t - 1)}e^{\lambda_2(e^t - 1)} = e^{(\lambda_1 + \lambda_2)(e^t - 1)}$$

och

$$m_Y(t) = e^{(\lambda_1 + \lambda_2)(e^t - 1)}$$

Eftersom att $m_Y(t) = m_{X_1+X_2}(t)$ för alla $t \in \mathbb{R}$ har $X_1 + X_2$ och Y samma fördelning, dvs.

$$X_1 + X_2 \sim \text{Poisson}(\lambda_1 + \lambda_2)$$

Momentgenererande funktioner

Bevis av centrala gränsvärdessatsen (specialfall)

Antag att $m_X(t)$ finns (mycket starkare än att $\mathbb{E}[X^2] < \infty$). Då är

$$m_{\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}(t) = e^{-\mu/(\sigma/\sqrt{n})} m_{\bar{X}}\left(\frac{t}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

och

$$\begin{aligned} m_{\bar{X}}(t) &= \mathbb{E}[e^{t\bar{X}}] = \mathbb{E}[e^{t(X_1+\dots+X_n)/n}] = \prod_{j=1}^n \mathbb{E}[e^{tX_j/n}] \\ &= \mathbb{E}[e^{tX/n}]^n = m_X(t/n)^n \end{aligned}$$

Vå får därför

$$\begin{aligned} m_{\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}(t) &= e^{-\mu n/(\sigma\sqrt{n})} m_X\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)^n \\ &= e^{-\mu n/(\sigma\sqrt{n})} \left(1 + \frac{\mu t}{\sigma\sqrt{n}} + \frac{t^2}{2n} + O(t^3/n^{3/2})\right)^n \\ &\sim e^{-\mu n/(\sigma\sqrt{n})} \left(e^{\frac{\mu t}{\sigma\sqrt{n}} + \frac{t^2}{2n} + O(t^3/n^{3/2})}\right)^n \\ &= e^{\frac{t^2}{2} + O(t^3/n^{1/2})} \rightarrow e^{t^2/2} = m_Z(t). \end{aligned}$$

Markov's olikhet

Låt $X \geq 0$ vara en stokastisk variabel med förväntat värde μ .

Definiera

$$Y = \begin{cases} k & \text{om } X \geq k \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

Då är

$$\begin{aligned} P(X > k) &= P(Y = k) = \frac{\mathbb{E}[Y]}{k} = \frac{\mathbb{E}[Y \cdot \mathbf{1}(X \geq k)]}{k} \\ &\leq \frac{\mathbb{E}[X \cdot \mathbf{1}(X \geq k)]}{k} \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{\mu} \end{aligned}$$

Markovs olikhet

Låt $X \geq 0$ vara en stokastisk variabel med väntevärde μ . Då är

$$P(X > k) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{k}$$

Chebyshevs olikhet

Låt X vara en stokastisk variabel med väntevärde μ och standardavvikelse σ . Då är

$$P(|X - \mu| > k) = P((X - \mu)^2 > k^2) \underbrace{\leq}_{\text{Markovs olikhet}} \frac{\mathbb{E}[(X - \mu)^2]}{k^2} = \frac{\sigma^2}{k^2}$$

Chebyshevs olikhet

Låt X vara en stokastisk variabel med väntevärde μ och standardavvikelse σ . Då är

$$P(|X - \mu| > k) \leq \frac{\sigma^2}{k^2}$$

Stora talens lag

Låt $X_1, X_2, \dots$ vara oberoende med samma fördelning, väntevärde μ och standardavvikelse σ . Låt $S_n = X_1 + \dots + X_n$ och $\bar{X}_n = S_n/n$. Då är $\mathbb{E}[\bar{X}_n] = \mu$ och $\text{Var}(\bar{X}_n) = \sigma^2/n$, så vi får

$$P(|\bar{X}_n - \mu| > \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2/n}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 n} \rightarrow 0.$$

Stora talens lag

Låt $X_1, X_2, \dots$ vara oberoende med samma fördelning, väntevärde μ och standardavvikelse σ . Låt $S_n = X_1 + \dots + X_n$ och $\text{Var}(\bar{X}_n) = S_n/n$. Då gäller

$$P(|\bar{X}_n - \mu| > \varepsilon) \rightarrow 0.$$

Exempel

Antag att vi kastar tärning, och låt $X_i = \mathbf{1}$ (tärningskast i är en sexa). Då är $\mu = \mathbb{E}[X_i] = 1/6$ och $\sigma^2 = 1/6(1 - 1/6) = 5/36$.

Stora talens lag

$$P\left(\left| \bar{X}_n - 1/6 \right| > \varepsilon\right) \rightarrow 0.$$

Markovs olikhet

$$P\left(\bar{X}_n > (1 + \varepsilon) \cdot 1/6\right) \leq \frac{1/6}{(1 + \varepsilon) \cdot 1/6} = \frac{1}{1 + \varepsilon}$$

Chebyshevs olikhet

$$P\left(\left| \bar{X}_n - 1/6 \right| > \varepsilon\right) \leq \frac{5/36}{\varepsilon^2 n}$$

Exempel

Låt $X_1, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma)$ så att $\bar{X}_n \sim N(\mu, \sigma/\sqrt{n})$.

Chebyshevs olikhet

$$P(|\bar{X}_n - \mu| > \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 n}$$

Normalfördelningen direkt

$$\begin{aligned} P(|\bar{X}_n - \mu| > \varepsilon) &= 2\Phi(-\varepsilon/(\sigma/\sqrt{n})) = 2\Phi(-\varepsilon\sqrt{n}/\sigma) \leq \frac{2e^{-(\varepsilon\sqrt{n}/\sigma)^2/2}}{\sqrt{2\pi} \cdot \varepsilon\sqrt{n}/\sigma} \\ &= \frac{2\sigma e^{-\varepsilon^2 n/(2\sigma^2)}}{\varepsilon\sqrt{2\pi n}} \end{aligned}$$

(går mot 0 mycket fortare!)