MATEMATIK
GU/Chalmers
Tentamen

Datum: 2022–06–03 EM
Examinator: Tony Johansson (ankn 1069)

TMA227 – Matematisk fördjupning
LGMA62 – Matematik 6 för gymnasielärare

Betyg LGMA62. 24p för G, 42p för VG.
Betyg TMA227. 24p för trea, 36p för fyra, 48p för femma.

Inga hjälpmedel tillåtna.

---

1. Hitta den allmänna lösningen till (8p)

$$y_{n+2} + y_{n+1} - 6y_n = 2^n + 3n.$$

2. Avgör om serien är absolut konvergent, betingat konvergent, eller divergent.

(a) (4p)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{1/3} - 4}{k^{2/3}(2k+1)},$$

(b) (4p)

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{1 - 2^{-k}},$$

3. Låt $\mathcal{P}_d$ vara vektorrummet av polynom av grad högst d, och låt $F : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_1$ vara en linjär avbildning med

$$F(x^3) = 3x, \quad F(x^2) = 2x - 1, \quad F(x) = x - 2, \quad F(1) = -3.$$

(a) Bestäm $F(2x^3 - 4x + 3)$. (1p)

(b) Ange en matrisrepresentation för F i baserna $\{1, x, x^2, x^3\}$ och $\{1, x\}$. (3p)

(c) Ange en bas för $N(F)$. (4p)

Anmärkning. Din bas i **(c)** ska anges med polynom, och inte koordinatvektorer.

4. Låt följande vara vektorer i $\mathbb{R}^4$: (7p)

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Hitta ortogonalprojektionen av u på det underrum som spänns upp av v_1, v_2.

5. Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara en funktion med $f(0) = 0$, sådan att f är deriverbar i punkten $x = 0$ med $f'(0) = \lambda$ för något $\lambda > 0$. Visa att

$$\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

är absolut konvergent. (7p)

6. Låt A vara en $n \times n$-matris sådan att $N(A) \cap V(A) = \{\vec{0}\}$.

(a) Visa att $N(A) \subseteq N(A^2)$. (2p)

(b) Visa att $N(A^2) \subseteq N(A)$. (2p)

Tips. Antag att $x \notin N(A)$, och visa att $x \notin N(A^2)$.

(c) Visa att $V(A^2) = V(A)$. (3p)

7. Antag att $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ är en följd av kontinuerliga funktioner sådan att $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ för varje $x \in [0, 1]$. Betrakta följande påståenden.

(A) $f_n \to 0$ likformigt på $[0, 1]$.

(B) För varje talföljd $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ med $x_n \in [0, 1]$ gäller att $\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = 0$.

(a) Visa att (A) $\Rightarrow$ (B). (4p)

(b) Visa att (B) $\Rightarrow$ (A). (4p)

8. Bevisa dimensionssatsen för matriser: om A är en $m \times n$-matris så gäller att (7p)

$$\dim N(A) + \dim V(A) = n.$$

Lösningar

1. Hitta den allmänna lösningen till (8p)

$$y_{n+2} + y_{n+1} - 6y_n = 2^n + 3n.$$

Lösning. Det karakteristiska polynomet $r^2 + r - 6 = (r-2)(r+3)$ har lösningar $r_1 = 2$ och $r_2 = -3$, så den homogena lösningen ges av

$$y_n^{(h)} = A2^n + B(-3)^n.$$

Högerledet är summan av två olika former, och vi hanterar dem separat. För termen 2^n ansätter vi, då en av de karakteristiska rötterna är 2, lösningen

$$w_n = Cn2^n.$$

Vi stoppar in:

$$\begin{aligned}
2^n &= w_{n+2} + w_{n+1} - 6w_n \\
&= C(n+2)2^{n+2} + C(n+1)2^{n+1} - 6Cn2^n \\
&= 2^n\left(4Cn + 2Cn - 6Cn + 8C + 2C\right) \\
&= 10C2^n.
\end{aligned}$$

Vi får $C = 1/10$, så $w_n = \frac{1}{10}n2^n$.

För termen $3n$ i högerledet ansätter vi, eftersom ingen av de karakteristiska rötterna är 1, lösningen $v_n = Dn + E$. Vi får

$$\begin{aligned}
3n &= v_{n+2} + v_{n+1} - 6v_n \\
&= D(n+2) + E + D(n+1) + E - 6(Dn + E) \\
&= -4Dn + 3D - 4E.
\end{aligned}$$

Detta ger $D = -3/4$ och $E = -9/16$, så $v_n = -3n/4 - 9/16$. Sammantaget är allmänna lösningen

$$y_n = y_n^{(h)} + w_n + v_n = A2^n + B(-3)^n + \frac{1}{10}n2^n - \frac{3}{4}n - \frac{9}{16}.$$

2. Avgör om serien är absolut konvergent, betingat konvergent, eller divergent. (4p)

(a)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{1/3} - 4}{k^{2/3}(2k+1)},$$

(4p)

(b)

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{1-2^{-k}},$$

Lösning.

(a) För alla $k \geq 4^3 = 64$ gäller att

$$0 \leq \frac{k^{1/3}-4}{k^{2/3}(2k+1)} \leq \frac{k^{1/3}}{k^{5/3}} = \frac{1}{k^{4/3}}.$$

Serien $\sum_{k\geq 1} k^{-4/3}$ är konvergent, så enligt jämförelsekriteriet är serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{1/3}-4}{k^{2/3}(2k+1)}$ konvergent.

(b) Termerna går inte mot 0, så serien är divergent.

3. Låt $\mathcal{P}_d$ vara vektorrummet av polynom av grad högst d, och låt $F : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_1$ vara en linjär avbildning med

$$F(x^3) = 3x, \quad F(x^2) = 2x-1, \quad F(x) = x-2, \quad F(1) = -3.$$

(a) Bestäm $F(2x^3 - 4x + 3)$. (1p)

(b) Ange en matrisrepresentation för F i baserna $\{1, x, x^2, x^3\}$ och $\{1, x\}$. (3p)

(c) Ange en bas för $N(F)$. (4p)

Lösning.

(a) Eftersom F är linjär gäller att

$$\begin{aligned} F(2x^3 - 4x + 3) &= 2F(x^3) - 4F(x) + 3F(1) \\ &= 2(3x) - 4(x-2) + 3(-3) \\ &= 2x - 1. \end{aligned}$$

(b) Kolonnerna i matrisen är koordinaterna för $F(1), F(x), F(x^2), F(x^3)$ i basen $\{1, x\}$. Alltså,

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(c) Det är tydligt att $V(F) = \mathcal{P}_1$, och dimensionssatsen ger

$$\dim N(F) = \dim \mathcal{P}_3 - \dim V(F) = 4 - 2 = 2.$$

Vi behöver hitta två linjärt oberoende polynom $p, q \in \mathcal{P}_3$ sådana att $F(p) = F(q) = 0$. Detta kan göras genom att lösa matrisekvationen $Ax = \vec{0}$, eller genom att testa sig fram. Vi ser att

$$\begin{aligned}
F(x^3 - 3x + 2) &= 3x - 3(x-2) + 2(-3) = 0, \\
F(x^2 - 2x + 1) &= (2x - 1) - 2(x - 2) - 3 = 0.
\end{aligned}$$

Polynomen $p = x^3 - 3x + 2$ och $q = x^2 - 2x + 1$ är tydligt linjärt oberoende, så de utgör en bas $N(F)$.

4. Låt följande vara vektorer i $\mathbb{R}^4$: (7p)

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Hitta ortogonalprojektionen av u på det underrum som spänns upp av v_1, v_2.

Lösning. Vi hittar först en ortogonalbas för underrummet $U = \operatorname{Span}\{v_1, v_2\}$. Vi har $\langle v_1, v_2 \rangle \neq 0$, så vi tillämpar Gram-Schmidts ortogonaliseringsmetod. Först sätter vi

$$e_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

och sen

$$\begin{aligned}
e_2 &= v_2 - \frac{\langle v_2, e_1 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle} e_1 \\
&= v_2 - \frac{0 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 3 \cdot 2 + 6 \cdot 2}{1^2 + 0^2 + 2^2 + 2^2} e_1 \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Då är $\{e_1, e_2\}$ en ortogonalbas för U. Ortogonalprojektionen av u på U ges, enligt projektionsformeln, av

$$\begin{aligned}
u' &= \frac{\langle u, e_1 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle} e_1 + \frac{\langle u, e_2 \rangle}{\langle e_2, e_2 \rangle} e_2 \\
&= \frac{1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1}{1^2 + 0^2 + 2^2 + 2^2} e_1 + \frac{(-2) \cdot 1 + 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 1}{(-2)^2 + 3^2 + (-1)^2 + 2^2} e_2 \\
&= \frac{5}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{2}{18} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 5-2 \\ 0+3 \\ 10-1 \\ 10+2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

5. Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara en funktion med $f(0) = 0$, sådan att f är deriverbar i punkten $x = 0$ med $f'(0) = \lambda$ för något $\lambda > 0$. Visa att

$$\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

är absolut konvergent. (7p)

Lösning 1. Eftersom f är deriverbar i $x = 0$ gäller

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \lambda.$$

Särskilt är

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(1/n^2)}{1/n^2} = \lambda.$$

Jämförelsekriteriet (specifikt dess gränsvärdesvariant, Sats 18.9), ger då att $\sum_{n=1}^{\infty} f(1/n^2)$ konvergerar eftersom $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ gör det.

Lösning 2. Att f är deriverbar i $x = 0$ innebär att det finns ett $\lambda \in \mathbb{R}$ sådant att

$$\lambda = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}.$$

Särskilt finns ett $\delta > 0$ sådant att om $|x| < \delta$ så är $|f(x)/x - \lambda| < 1$. Med andra ord gäller

$$|x| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x)| \leq (1 + |\lambda|)|x|.$$

Detta ger oss en instängning för seriens termer: vi har

$$\frac{1}{n^2} < \delta \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq \left| f\left(\frac{1}{n^2}\right) \right| \leq \frac{1 + |\lambda|}{n^2}.$$

Kravet $1/n^2 < \delta$ kan översättas till $n > N$, där $N = 1/\sqrt{\delta}$. Serien $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + |\lambda|)/n^2$ är konvergent, så då är $\sum_{n=1}^{\infty} f(1/n^2)$ asbolut konvergent enligt jämförelsekriteriet.

6. Låt A vara en $n \times n$-matris sådan att $N(A) \cap V(A) = \{\vec{0}\}$.

(a) Visa att $N(A) \subseteq N(A^2)$. (2p)

(b) Visa att $N(A^2) \subseteq N(A)$. (2p)

Tips. Antag att $x \notin N(A)$, och visa att $x \notin N(A^2)$.

(c) Visa att $V(A^2) = V(A)$. (3p)

Lösning.

(a) Antag att $x \in N(A)$. Då är

$$A^2 x = A(Ax) = A\vec{0} = \vec{0},$$

så $x \in N(A^2)$. Alltså är $N(A) \subseteq N(A^2)$.

(b) Anta nu att $x \notin N(A)$, och låt $y = Ax$. Då är $y \in V(A)$, och $y \neq \vec{0}$ eftersom $x \notin N(A)$. Eftersom $N(A) \cap V(A) = \{\vec{0}\}$ har vi då $y \notin N(A)$, så

$$A^2 x = A(Ax) = Ay \neq \vec{0}.$$

Vi har visat att om $x \notin N(A)$ så är $x \notin N(A^2)$. Då är $N(A^2) \subseteq N(A)$.

(c) Dimensionssatsen, och $N(A^2) = N(A)$, ger att

$$\begin{aligned} \dim V(A^2) &= n - \dim N(A^2) \\ &= n - \dim N(A) \\ &= \dim V(A). \end{aligned}$$

Vi har också $V(A^2) \subseteq V(A)$. Men eftersom $V(A)$ och $V(A^2)$ har samma ändliga dimension, så måste vi ha $V(A^2) = V(A)$.

7. Antag att $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ är en följd av kontinuerliga funktioner sådan att $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ för varje $x \in [0, 1]$. Betrakta följande påståenden.

(A) $f_n \to 0$ likformigt på $[0, 1]$.

(B) För varje talföljd $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ med $x_n \in [0, 1]$ gäller att $\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = 0$.

(a) Visa att (A) $\Rightarrow$ (B). (4p)

(b) Visa att (B) $\Rightarrow$ (A). (4p)

Lösning.

(a) Anta att (A) håller, och låt $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ vara en godtycklig talföljd med $x_n \in [0,1]$. För varje $\varepsilon > 0$ finns då ett N_ε sådant att

$$n \geq N_\varepsilon \implies |f_n(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [0,1].$$

Särskilt gäller för $n \geq N_\varepsilon$ att $|f_n(x_n)| < \varepsilon$. Alltså: för varje $\varepsilon > 0$ finns ett N_ε sådant att $|f_n(x_n)| < \varepsilon$ för alla $n \geq N_\varepsilon$. Detta är definitionen av $\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = 0$.

(b) Anta att (B) håller. Definiera

$$a_n = \sup_{0 \leq x \leq 1} |f_n(x)|.$$

Eftersom f_n är kontinuerlig på det slutna intervallet $[0,1]$, finns ett $x_n \in [0,1]$ sådant att $f_n(x_n) = a_n$. Då medför (B) att $a_n \to 0$ då $n \to \infty$, vilket medför (A).

8. Bevisa dimensionssatsen för matriser: om A är en $m \times n$-matris så gäller att (7p)

$$\dim N(A) + \dim V(A) = n.$$

Lösning. Se boken/anteckningar.

Alternativ lösning (som många försökte). Anta att A radreduceras till en matris A' på radkanonisk form, som har $k \leq n$ pivotkolonner. Då är $N(A) = N(A')$ känt från kursen, och $\dim V(A) = \dim V(A')$ eftersom en bas för $V(A)$ ges av samma kolonner som för $V(A')$. Det räcker alltså att visa satsen för A'.

Det är tydligt att icke-pivotkolonner kan skrivas som linjärkombinationer av pivotkolonner, så pivotkolonnerna spänner upp $V(A')$. Det är också tydligt att pivotkolonnerna är linjärt oberoende, så de utgör en bas, och $\dim V(A') = k$.

För att hitta $\dim N(A')$ löser vi ekvationssystemet $A'x = \vec{0}$. Vi kan ändra ordning på kolonner utan att ändra $\dim N(A')$, så anta att de första k kolonnerna är pivotkolonner och resterande $n-k$ inte är det. Vi får då en lösning där $x_{k+1}, \ldots, x_n$ är fria, och $x_1, \ldots, x_k$ kan skrivas som kombinationer av de fria variablerna. Därför är $\dim N(A') = n - k$.