MATEMATIK
GU/Chalmers
Tentamen

Datum: 2022–10–07 EM
Examinator: Tony Johansson (ankn 1069)

TMA227 – Matematisk fördjupning
LGMA62 – Matematik 6 för gymnasielärare

Betyg LGMA62. 24p för G, 42p för VG.
Betyg TMA227. 24p för trea, 36p för fyra, 48p för femma.

Inga hjälpmedel tillåtna. Motivera dina svar väl.

---

1. Hitta den allmänna lösningen till (7p)

$$y_{n+2} - 4y_{n+1} + 3y_n = 3n - 2, \quad n \geq 0.$$

2. Avgör om serien är konvergent eller divergent.

(a) (4p)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{2^k + 4^k}$$

(b) (4p)

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k - \sqrt{k}}$$

3. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & -1 \\ -3 & 6 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Ange en bas för $N(A)$. (4p)

(b) Ange en bas för $V(A)$. (4p)

4. Låt $\mathcal{P}_3$ vara vektorrummet av polynom av grad högst 3, och låt $F : \mathcal{P}_3 \to \mathbb{R}$ vara den linjära avbildningen

$$F(p) = \int_{-1}^{1} p(x)dx.$$

(a) Vilken dimension har värderummet $V(F)$? (2p)

(b) Ange en bas för $N(F)$. (5p)

5. Låt V vara ett vektorrum med en bas $v_1, \dots, v_n$. Anta att $F : V \to V$ är en linjär avbildning.

(a) Visa att om $N(F) = \{\vec{0}\}$ så är $F(v_1), \dots, F(v_n)$ är en bas för V. (4p)

(b) Visa att om $N(F) \neq \{\vec{0}\}$ så är $F(v_1), \dots, F(v_n)$ inte en bas för V. (3p)

6. En talföljd $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ är sådan att $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ uppfyller differentialekvationen (8p)

$$xy'' - x^2 y' + y = 0$$

i ett område kring $x = 0$, med initialvillkor $y(0) = y'(0) = 1$. Ange konvergensradie för potensserien $y(x)$.

Tips. Uppgiften går att lösa utan att hitta ett explicit uttryck för $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$.

7. Antag att serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är absolut konvergent. Visa att $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ är konvergent. (7p)

8. Formulera och bevisa Leibniz konvergenskriterium. (8p)