MATEMATIK
GU/Chalmers
Tentamen

Datum: 2022–10–07 EM
Examinator: Tony Johansson (ankn 1069)

TMA227 – Matematisk fördjupning
LGMA62 – Matematik 6 för gymnasielärare

Betyg LGMA62. 24p för G, 42p för VG.
Betyg TMA227. 24p för trea, 36p för fyra, 48p för femma.

Inga hjälpmedel tillåtna. Motivera dina svar väl.

---

1. Hitta den allmänna lösningen till (7p)

$$y_{n+2} - 4y_{n+1} + 3y_n = 3n - 2, \quad n \geq 0.$$

2. Avgör om serien är konvergent eller divergent.

(a) (4p)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{2^k + 4^k}$$

(b) (4p)

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k - \sqrt{k}}$$

3. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & -1 \\ -3 & 6 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Ange en bas för $N(A)$. (4p)

(b) Ange en bas för $V(A)$. (4p)

4. Låt $\mathcal{P}_3$ vara vektorrummet av polynom av grad högst 3, och låt $F : \mathcal{P}_3 \to \mathbb{R}$ vara den linjära avbildningen

$$F(p) = \int_{-1}^{1} p(x)dx.$$

(a) Vilken dimension har värderummet $V(F)$? (2p)

(b) Ange en bas för $N(F)$. (5p)

5. Låt V vara ett vektorrum med en bas $v_1, \ldots, v_n$. Anta att $F : V \to V$ är en linjär avbildning.

(a) Visa att om $N(F) = \{\vec{0}\}$ så är $F(v_1), \ldots, F(v_n)$ är en bas för V. (4p)

(b) Visa att om $N(F) \neq \{\vec{0}\}$ så är $F(v_1), \ldots, F(v_n)$ inte en bas för V. (3p)

6. En talföljd $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ är sådan att $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ uppfyller differentialekvationen (8p)

$$xy'' - x^2y' + y = 0$$

i ett område kring $x = 0$, med initialvillkor $y(0) = y'(0) = 1$. Ange konvergensradie för potensserien $y(x)$.

Tips. Uppgiften går att lösa utan att hitta ett explicit uttryck för $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$.

7. Antag att serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är absolut konvergent. Visa att $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ är konvergent. (7p)

8. Formulera och bevisa Leibniz konvergenskriterium. (8p)

Lösningar

1. Det karakteristiska polynomet $r^2 - 4r + 3 = (r-1)(r-3)$ har nollställen 1 och 3, så den homogena lösningen är

$$y_n^{(h)} = A1^n + B3^n = A + B3^n.$$

Eftersom $r = 1$ förekommer som ett nollställe (med multiplicitet 1), och högerledet är ett polynom av grad 1, så ansätts partikulärlösningen

$$y_n^{(p)} = n(Cn + D).$$

Denna stoppas in:

$$\begin{aligned}
3n - 2 &= y_{n+2}^{(p)} - 4y_{n+1}^{(p)} + 3y_n^{(p)} \\
&= (n+2)(C(n+2) + D) - 4(n+1)(C(n+1) + D) + 3n(Cn + D) \\
&= n^2(C - 4C + 3C) \\
&\quad + n(2C + D + 2C - 4C - 4D - 4C + 3D) \\
&\quad + (4C + 2D - 4C - 4D) \\
&= -4Cn - 2D.
\end{aligned}$$

Genom att identifiera koefficenter får vi $C = -3/4$ och $D = 1$. Då är

$$y_n^{(p)} = n\left(-\frac{3}{4}n + 1\right) = -\frac{3}{4}n^2 + n.$$

Den allmänna lösningen är då

$$y_n = y_n^{(h)} + y_n^{(p)} = A + B3^n - \frac{3}{4}n^2 + n.$$

2. (a) Vi använder rotkriteriet:

$$\sqrt[k]{\frac{3^k}{2^k + 4^k}} = \frac{3}{4}\sqrt[k]{\frac{1}{\left(\frac{2}{4}\right)^k + 1}} \to \frac{3}{4}.$$

Detta är mindre än 1, så serien är konvergent.

(b) Vi använder Leibniz konvergenskriterium, och skriver $a_k = 1/(k - \sqrt{k})$. Denna talföljd är positiv för $k \geq 2$, och har $a_k \to 0$. Vi behöver bara visa att den är avtagande. Det är okej att skriva att det är uppenbart, men vi kontrollerar extra noga. För att se att a_k är avtagande räcker det att konstatera att $1/a_k = k - \sqrt{k}$ är växande. Det, i sin tur, visar vi enklast genom att definiera

$$f(x) = x - \sqrt{x},$$

och ta derivatan:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

För $x \geq 2$ är denna positiv, så $x - \sqrt{x}$ är växande. Det visar att a_k är avtagande.

3. Matrisen radreduceras:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & -1 \\ -3 & 6 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A'.$$

Pivotkolonnerna är nummer 1, 3 och 4. Från den ursprungliga matrisen läser vi av att

$$V(A) = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

och de tre angivna vektorerna är en bas för $V(A)$.

För att hitta nollrummet använder vi det faktum att $N(A) = N(A')$, där A' är den radreducerade matrisen, och löser $A'x = 0$. Detta ger ett ekvationssystem

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x_1 & -2x_2 & & & +x_5 & = & 0, \\ & & x_3 & +2x_4 & & = & 0, \\ & & & x_4 & -x_5 & = & 0. \end{array} \right.$$

Vi låter $x_2 = s$ och $x_5 = t$ vara fria variabler och får en allmän lösning.

$$\begin{aligned} x_1 &= 2s - t, \\ x_2 &= s, \\ x_3 &= -2t, \\ x_4 &= t, \\ x_5 &= t. \end{aligned}$$

Då är

$$N(A) = \left\{ s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\},$$

och de två vektorerna utgör en bas för $N(A)$.

4. (a) Vi har $V(F) \subseteq \mathbb{R}$, så antingen är $V(F) = \{0\}$ eller $V(F) = \mathbb{R}$. Det räcker att konstatera att till exempel

$$F(1) = 2,$$

för att se att $V(F) = \mathbb{R}$. Dimensionen är då 1.

(b) Från dimensionssatsen får vi

$$\dim N(F) = \dim \mathcal{P}_3 - \dim V(F) = 4 - 1 = 3.$$

Detta hjälper oss, för då vet vi att vi behöver hitta tre linjärt oberoende polynom i $N(F)$ för att skapa en bas.

För ett allmänt polynom $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ gäller att

$$F(p) = a\int_{-1}^{1} x^3 dx + b\int_{-1}^{1} x^2 dx + c\int_{-1}^{1} x dx + d\int_{-1}^{1} 1 dx = \frac{2}{3}b + 2d.$$

Vi har alltså att $p \in N(F)$ om och endast om $\frac{2}{3}b + 2d = 0$, vilket kan förenklas till $b + 3d = 0$. Detta uppfylls till exempel av polynomen

$$p_1(x) = x^3, \quad p_2(x) = x, \quad p_3(x) = 3x^2 - 1.$$

Dessa är tydligt linjärt oberoende, så de utgör en bas för $N(F)$.

5. (a) Vektorrummet V har dimension n, eftersom dess bas innehåller n element. Det räcker således att visa att de n vektorerna $F(v_1), \ldots, F(v_n)$ är linjärt oberoende. Eftersom F är linjär har vi

$$\begin{aligned} \lambda_1 F(v_1) + \lambda_2 F(v_2) \cdots + \lambda_n F(v_n) &= \vec{0} \\ &\Longleftrightarrow \\ F(\lambda_1 v_1) + F(\lambda_2 v_2) \cdots + F(\lambda_n v_n) &= \vec{0} \\ &\Longleftrightarrow \\ F(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n) &= \vec{0}. \end{aligned}$$

Vi har då $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n \in N(F)$. Men eftersom $N(F) = \{\vec{0}\}$ måste vi då ha

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = \vec{0}.$$

Vektorerna $v_1, \ldots, v_n$ är en bas för V, och därmed linjärt oberoende, vilket medför att denna ekvationen endast har den triviala lösningen $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$. Därför gäller samma för ekvationen vi började med;

$$\lambda_1 F(v_1) + \lambda_2 F(v_2) \cdots + \lambda_n F(v_n) = \vec{0}$$

har bara den triviala lösningen, vilket visar att $F(v_1), \ldots, F(v_n)$ är linjärt oberoende.

(b) Låt $u \in N(F)$, där $u \neq \vec{0}$. Då finns en representation

$$u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}.$$

Notera att minst ett α_i är nollskilt. Eftersom $u \in N(F)$ och F är linjär så gäller

$$\begin{aligned}\vec{0} = F(u) &= F(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n) \\ &= \alpha_1 F(v_1) + \alpha_2 F(v_2) + \cdots + \alpha_n F(v_n).\end{aligned}$$

Minst ett α_i är nollskilt, så detta visar att $F(v_1), \ldots, F(v_n)$ är linjärt beroende.

6. Ansätt

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Då är

$$\begin{aligned}y' &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \\ y'' &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.\end{aligned}$$

Då är

$$\begin{aligned}xy'' - x^2 y' + y &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} \left(n(n-1)a_n - (n-1)a_{n-1} + a_n\right) x^n.\end{aligned}$$

För att detta ska vara 0 för alla x krävs att

$$\begin{aligned}0 &= n(n-1)a_n - (n-1)a_{n-1} + a_n \\ &= (n^2 - n + 1)a_n - (n-1)a_{n-1},\end{aligned}$$

för $n \geq 2$, vilket ger rekursionen

$$a_n = \frac{n-1}{n^2 - n + 1} a_{n-1}, \quad n \geq 2.$$

Vi betraktar nu potensserien $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Kvotregeln ger

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n-1}} \right| = \lim \frac{n-1}{n^2 - n + 1} = 0.$$

(Här behöver man också kontrollera att initialvillkoren ger att $a_n \neq 0$ för alla n.) Slutsatsen är att seriens konvergensradie är ∞, det vill säga $y(x)$ konvergerar för alla $x \in \mathbb{R}$.

7. Notera först att talföljden a_n måste uppfylla $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$, eftersom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är absolut konvergent. Låt $b_n = a_n^2$. Eftersom $|a_n|$ och b_n är positiva talföljder kan vi tillämpa gränsvärdesvarianten av jämförelsekriteriet; vi har

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{|a_n|} = \lim \frac{a_n^2}{|a_n|} = \lim |a_n| = 0.$$

Eftersom $\sum |a_n|$ är konvergent, så är även $\sum a_n^2$ konvergent.

Alternativt kan vi använda jämförelsekriteriet mer direkt. Eftersom $|a_n| \to 0$ finns ett N sådant att $|a_n| \le 1$ för alla $n \ge N$. Då gäller för $n \ge N$ att

$$0 \le a_n^2 \le |a_n|,$$

och jämförelsekriteriet ger att $\sum a_n^2$ konvergerar.

8. Se boken.