MATEMATIK
GU/Chalmers
Tentamen

Datum: 2022–08–18 FM
Examinator: Tony Johansson (ankn 1069)

TMA227 – Matematisk fördjupning
LGMA62 – Matematik 6 för gymnasielärare

Betyg LGMA62. 24p för G, 42p för VG.
Betyg TMA227. 24p för trea, 36p för fyra, 48p för femma.

Inga hjälpmedel tillåtna. Motivera dina svar väl.

---

1. Hitta lösningen till (8p)

$$\begin{cases} y_{n+2} - 4y_{n+1} + 4y_n = 2^n, \quad n = 0, 1, \ldots, \\ y_0 = y_1 = 1 \end{cases}$$

2. Ange konvergensintervall för följande funktionsserier.

(a) (4p)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

(b) (4p)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^2 3^k} x^k$$

3. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & -1 \\ -3 & 6 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Ange en bas för $N(A)$. (4p)

(b) Ange en bas för $V(A)$. (4p)

4. Betrakta följande underrum till $\mathbb{R}^3$: (7p)

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ -2t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Det finns en matris A sådan att Av är ortogonalprojektionen av v på U för varje $v \in \mathbb{R}^3$. Hitta matrisen A.

5. Låt A vara en $n \times n$-matris sådan att $N(A) \cap V(A) = \{\vec{0}\}$.

(a) Visa att $N(A) \subseteq N(A^2)$. (2p)

(b) Visa att $N(A^2) \subseteq N(A)$. (2p)

Tips. Antag att $x \notin N(A)$, och visa att $x \notin N(A^2)$.

(c) Visa att $V(A^2) = V(A)$. (3p)

6. Låt V vara vektorrummet av sekvenser $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ med addition och skalärmultiplikation definierade på de naturliga sätten;

$$\begin{aligned} \{a_n\}_{n=1}^{\infty} + \{b_n\}_{n=1}^{\infty} &= \{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}, & \{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \in V \\ \lambda\{a_n\}_{n=1}^{\infty} &= \{\lambda a_n\}_{n=1}^{\infty}, & \lambda \in \mathbb{R},\ \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in V. \end{aligned}$$

För $m \geq 1$ definieras underrum

$$\begin{aligned} A_m &= \{\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in V : a_n = 0 \text{ för alla } n \leq m\}, \\ B_m &= \left\{ \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in V : \sum_{n=1}^{m} a_n = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Du behöver inte visa att A_m och B_m är underrum till V.

(a) Definiera (4p)

$$A = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m = \{\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in V :\ \exists m \geq 1 \text{ sådant att } a_n = 0 \text{ för alla } n \leq m\}.$$

Visa att A är ett underrum till V.

(b) Definiera (3p)

$$B = \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m = \left\{ \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in V : \sum_{n=1}^{m} a_n = 0 \text{ för något } m \geq 1 \right\}.$$

Visa att B *inte* är ett underrum till V.

7. Antag att serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är absolut konvergent. Visa att $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ är konvergent. (7p)

8. Formulera och bevisa Leibniz konvergenskriterium. (8p)