MATEMATIK
GU/Chalmers
Tentamen

Datum: 2022–08–18 FM
Examinator: Tony Johansson (ankn 1069)

TMA227 – Matematisk fördjupning
LGMA62 – Matematik 6 för gymnasielärare

Betyg LGMA62. 24p för G, 42p för VG.
Betyg TMA227. 24p för trea, 36p för fyra, 48p för femma.

Inga hjälpmedel tillåtna. Motivera dina svar väl.

---

1. Hitta lösningen till (8p)

$$\begin{cases} y_{n+2} - 4y_{n+1} + 4y_n = 2^n, \quad n = 0, 1, \ldots, \\ y_0 = y_1 = 1 \end{cases}$$

2. Ange konvergensintervall för följande funktionsserier.

(a) (4p)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

(b) (4p)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^2 3^k} x^k$$

3. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & -1 \\ -3 & 6 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Ange en bas för $N(A)$. (4p)

(b) Ange en bas för $V(A)$. (4p)

4. Betrakta följande underrum till $\mathbb{R}^3$: (7p)

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ -2t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Det finns en matris A sådan att Av är ortogonalprojektionen av v på U för varje $v \in \mathbb{R}^3$. Hitta matrisen A.

5. Låt A vara en $n \times n$-matris sådan att $N(A) \cap V(A) = \{\vec{0}\}$.

(a) Visa att $N(A) \subseteq N(A^2)$. (2p)

(b) Visa att $N(A^2) \subseteq N(A)$. (2p)

Tips. Antag att $x \notin N(A)$, och visa att $x \notin N(A^2)$.

(c) Visa att $V(A^2) = V(A)$. (3p)

6. Låt V vara vektorrummet av sekvenser $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ med addition och skalärmultiplikation definierade på de naturliga sätten;

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} + \{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}, \qquad \{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \in V$$
$$\lambda\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\lambda a_n\}_{n=1}^{\infty}, \qquad \lambda \in \mathbb{R},\ \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in V.$$

För $m \geq 1$ definieras underrum

$$A_m = \{\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in V : a_n = 0 \text{ för alla } n \leq m\},$$
$$B_m = \left\{\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in V : \sum_{n=1}^{m} a_n = 0\right\}.$$

Du behöver inte visa att A_m och B_m är underrum till V.

(a) Definiera (4p)

$$A = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m = \{\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in V : \ \exists m \geq 1 \text{ sådant att } a_n = 0 \text{ för alla } n \leq m\}.$$

Visa att A är ett underrum till V.

(b) Definiera (3p)

$$B = \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m = \left\{\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in V : \sum_{n=1}^{m} a_n = 0 \text{ för något } m \geq 1\right\}.$$

Visa att B *inte* är ett underrum till V.

7. Antag att serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är absolut konvergent. Visa att $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ är konvergent. (7p)

8. Formulera och bevisa Leibniz konvergenskriterium. (8p)

Lösningar

1. Det karakteristiska polynomet $r^2 - 4r + 4 = (r-2)^2$ har dubbelrot $r_1 = r_2 = 2$, så den homogena lösningen ges av

$$y_n^{(h)} = (An + B)2^n.$$

Eftersom 2 är en dubbelrot och bas för högerledet, så ansätter vi

$$y_n^{(p)} = Cn^2 2^n.$$

Detta stoppas in:

$$\begin{aligned}
2^n &= y_{n+2}^{(p)} - 4y_{n+1}^{(p)} + 4y_n^{(p)} \\
&= C(n+2)^2 2^{n+2} - 4C(n+1)^2 2^{n+1} + 4Cn^2 2^n \\
&= C2^n \left(4(n+2)^2 - 8(n+1)^2 + 4n^2\right) \\
&= C2^n \left(4n^2 + 16n + 16 - 8n^2 - 16n - 8 + 4n^2\right) \\
&= C2^n \cdot 8.
\end{aligned}$$

Från detta löser vi ut $C = 1/8$. Vi får då den allmänna lösningen

$$y_n = y_n^{(h)} + y_n^{(p)} = (An + B)2^n + \frac{1}{8}n^2 2^n = \left(\frac{n^2}{8} + An + B\right)2^n.$$

Vi stoppar in de givna begynnelsevillkoren för att lösa ut A och B.

$$\begin{aligned}
1 = y_0 &= \left(\frac{0^2}{8} + A \cdot 0 + B\right)2^0 = B, \\
1 = y_1 &= \left(\frac{1}{8} + A + B\right) \cdot 2
\end{aligned}$$

Vi har tydligen $B = 1$, och kan lösa ut A:

$$A = \frac{1}{2} - B - \frac{1}{8} = \frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{8} = -\frac{5}{8}.$$

Vi får då

$$y_n = \left(\frac{n^2}{8} - \frac{5n}{8} + 1\right)2^n.$$

2. **(a)** För varje fixt $x \in \mathbb{R}$ är

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x^{2(k+1)}/(2(k+1))!}{x^{2k}/(2k)!} = \lim_{k\to\infty} \frac{x^2}{(2k+1)(2k+2)} = 0.$$

Kvotkriteriet ger då att serien konvergerar för varje $x \in \mathbb{R}$, så konvergensintervallet är $\mathbb{R}$.

Alternativt kan man göra variabelsubstitutionen $y = x^2$ och använda kvotformeln på $\sum_k y^k/(2k)!$.

(b) Vi använder rotformeln, och beräknar

$$A = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{2^k}{k^2 3^k}\right)^{1/k} = \lim_{k\to\infty} \frac{2}{k^{2/k}3} = \frac{2}{3}.$$

Konvergensradien är då $R = 3/2$. Det återstår att avgöra om punkterna $\pm 3/2$ ingår i intervallet.

Vi stoppar in $x = 3/2$ och får den numeriska serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^2 3^k} \left(\frac{3}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Denna hör till listan av serier vi ska minnas; den är **konvergent**.

För $x = -3/2$ får vi den alternerande varianten:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^2 3^k} \left(-\frac{3}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}.$$

Denna är konvergent eftersom $1/k^2$ är det. (Absolut konvergenta serier är konvergenta.)

Svar: konvergensintervallet är $[-3/2, 3/2]$, alltså $-3/2 \le x \le 3/2$.

3. Matrisen radreduceras:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & -1 \\ -3 & 6 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A'.$$

Pivotkolonnerna är nummer 1, 3 och 4. Från den ursprungliga matrisen läser vi av att

$$V(A) = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

och de tre angivna vektorerna är en bas för $V(A)$.

För att hitta nollrummet använder vi det faktum att $N(A) = N(A')$, där A' är den radreducerade matrisen, och löser $A'x = 0$. Detta ger ett ekvationssystem

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & -2x_2 & & & +x_5 & = & 0, \\ & & x_3 & +2x_4 & & = & 0, \\ & & & x_4 & -x_5 & = & 0. \end{array}\right.$$

Vi låter $x_2 = s$ och $x_5 = t$ vara fria variabler och får en allmän lösning.

$$\begin{aligned} x_1 &= 2s - t, \\ x_2 &= s, \\ x_3 &= -2t, \\ x_4 &= t, \\ x_5 &= t. \end{aligned}$$

Då är

$$N(A) = \left\{ s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\},$$

och de två vektorerna utgör en bas för $N(A)$.

4. Ortogonalprojektion på U är en linjär avbildning, och för att hitta matrisrepresentationen behöver vi projicera basvektorerna

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

på U. Låt v_1, v_2 och v_3 vara ortogonalprojektionen av e_1, e_2 respektive e_3. Underrummet U är endimensionellt, och spänns upp av vektorn

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Projektionsformeln ger då

$$v_1 = \frac{\langle u, e_1 \rangle}{\langle u, u \rangle} u = \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 - 2 \cdot 0}{1^2 + 2^2 + (-2)^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

På samma sätt får vi

$$v_2 = \frac{\langle u, e_2 \rangle}{\langle u, u \rangle} u = \frac{1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 - 2 \cdot 0}{1^2 + 2^2 + (-2)^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{2}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$v_3 = \frac{\langle u, e_3 \rangle}{\langle u, u \rangle} u = \frac{1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 2 \cdot 1}{1^2 + 2^2 + (-2)^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{-2}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Då ges en matrisrepresentation för ortogonalprojektion på U av

$$A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Kolonnerna är vektorerna v_1, v_2, v_3.

5. **(a)** Antag att $x \in N(A)$. Då är

$$A^2 x = A(Ax) = A\vec{0} = \vec{0},$$

så $x \in N(A^2)$. Alltså är $N(A) \subseteq N(A^2)$.

(b) Anta nu att $x \notin N(A)$, och låt $y = Ax$. Då är $y \in V(A)$, och $y \neq \vec{0}$ eftersom $x \notin N(A)$. Eftersom $N(A) \cap V(A) = \{\vec{0}\}$ har vi då $y \notin N(A)$, så

$$A^2 x = A(Ax) = Ay \neq \vec{0}.$$

Vi har visat att om $x \notin N(A)$ så är $x \notin N(A^2)$. Då är $N(A^2) \subseteq N(A)$.

(c) Dimensionssatsen, och $N(A^2) = N(A)$, ger att

$$\begin{aligned} \dim V(A^2) &= n - \dim N(A^2) \\ &= n - \dim N(A) \\ &= \dim V(A). \end{aligned}$$

Vi har också $V(A^2) \subseteq V(A)$. Men eftersom $V(A)$ och $V(A^2)$ har samma ändliga dimension, så måste vi ha $V(A^2) = V(A)$.

6. Tre saker behöver stämma för att en mängd M ska vara ett underrum. Det krävs att $\vec{0} \in M$, där $\vec{0}$ i detta fallet är sekvensen med $a_n = 0$ för alla n. Det krävs också att om $\{a_n\}, \{b_n\} \in M$ så är $\{a_n\} + \{b_n\} \in M$. Slutligen krävs att om $\{a_n\} \in M$ och $\lambda \in \mathbb{R}$, så är $\lambda\{a_n\} \in M$.

(a) Enklast är att notera att $A = A_1$. Vi vet redan att A_1 är ett underrum, och är klara där. Om detta inte noteras kan vi använda underrumskriterierna som följer.

Vi noterar först att nollsekvensen uppenbarligen tillhör A.

Anta nu att $\{a_n\}, \{b_n\} \in A$. Då finns ett $m_1 \geq 1$ sådant att $a_n = 0$ för alla $n \leq m_1$, och ett $m_2 \geq 1$ sådant att $b_n = 0$ för alla $n \leq m_2$. Om vi låter $m = \min\{m_1, m_2\} \geq 1$, följer då att $a_n + b_n = 0$ för alla $n \leq m$, och det följer att $\{a_n\} + \{b_n\} \in A$.

Slutligen, antag att $\lambda \in \mathbb{R}$ och $\{a_n\} \in A$. Det finns ett $m \geq 1$ sådant att $a_n = 0$ för alla $n \leq m$, och då gäller även att $\lambda a_n = 0$ för alla $n \leq m$.

De tre kraven är uppfyllda, så A är ett underrum till V.

(b) För att visa att B inte är ett underrum räcker det att hitta ett motexempel till underrumskriterierna. Vi noterar att sekvenserna

$$\begin{aligned} a_n &= 0, 1, 1, 1, \ldots, \\ b_n &= -1, 1, 1, 1, \ldots \end{aligned}$$

båda tillhör B; för $\{a_n\}$ noterar vi att $\sum_{n=1}^{1} a_n = 0$, och för $\{b_n\}$ är $\sum_{n=1}^{2} b_n = 0$. Men vi har

$$a_n + b_n = -1, 2, 2, 2, \ldots,$$

och ingen delsumma för denna sekvens är noll (vi har att $\sum_{n=1}^{m}(a_n + b_n)$ är udda för varje m). Därför är B inte ett underrum.

7. Notera först att talföljden a_n måste uppfylla $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$, eftersom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är absolut konvergent. Låt $b_n = a_n^2$. Eftersom $|a_n|$ och b_n är positiva talföljder kan vi tillämpa gränsvärdesvarianten av jämförelsekriteriet; vi har

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{|a_n|} = \lim \frac{a_n^2}{|a_n|} = \lim |a_n| = 0.$$

Eftersom $\sum |a_n|$ är konvergent, så är även $\sum a_n^2$ konvergent.

Alternativt kan vi använda jämförelsekriteriet mer direkt. Eftersom $|a_n| \to 0$ finns ett N sådant att $|a_n| \leq 1$ för alla $n \geq N$. Då gäller för $n \geq N$ att

$$0 \leq a_n^2 \leq |a_n|,$$

och jämförelsekriteriet ger att $\sum a_n^2$ konvergerar.

8. Se boken.