

TMA227, LGMA62
Logik, mängdlära och bevis

I detta dokumentet kommer vi behandla matematiska bevis, genom att prata om följande.

- Formell logik: utsagor, implikationer, ekvivalenser, symbolerna $\exists, \forall$.
- Mängdlära: snitt, union, differens, delmängder, komplement.
- Hur fungerar bevis? Vilka bevismetoder finns?

Vi kommer även prata om mängdlära och funktioner, som ger oss något att applicera våra bevismetoder på.

1 Utsagor, implikationer

En matematisk *utsaga* är ett påstående, som antingen är Sant ($\mathbb{S}$) eller Falskt ($\mathbb{F}$). Exempel på utsagor är följande:

$$\begin{aligned} p &: \langle 7 \text{ är större än } 5 \rangle, \\ q &: \langle x^2 - 4x = 0 \rangle, \\ r &: \langle x \geq 0 \rangle, \\ s &: \langle x = 4 \rangle. \end{aligned}$$

Utsagorna q, r, s är exempel på *öppna utsagor*, det vill säga utsagor som beror på värdet på den involverade storheten x . För att förtydliga detta beroende kan vi skriva $q(x), r(x), s(x)$ när det gör saken tydligare. Utsaga p , å andra sidan, är en *sluten utsaga*, vars sanningsvärde inte beror på några yttre omständigheter. Vi vet att 7 är större än 5, så p är alltid sann.

1.1 Implikationer, ekvivalenser

Grunden för matematiska resonemang är *implikationer* och *ekvivalenser* mellan utsagor. För att förstå implikationer kan vi ta några exempel från ovan:

$$\begin{aligned} \langle x = 4 \rangle &\implies \langle x \geq 0 \rangle, \\ \langle x = 4 \rangle &\implies \langle x^2 - 4x = 0 \rangle, \\ \langle x^2 - 4x = 0 \rangle &\implies \langle x \geq 0 \rangle. \end{aligned}$$

För två utsagor a, b , säger vi att $a \implies b$ (“ a implicerar b ”) om a inte kan vara sann utan att b är det. Om $a(x)$ och $b(x)$ är öppna utsagor, så betyder $a \implies b$ att “för alla x sådana att $a(x)$ är sant, så är även $b(x)$ sant”.

Om $a \implies b$ och $b \implies a$ så är a och b *ekvivalenta*, och vi skriver $a \iff b$;

$$\begin{aligned}\langle x - 3 = 2 \rangle &\iff \langle x = 5 \rangle, \\ \langle x^2 - 4x = 0 \rangle &\iff \langle x = 0 \text{ eller } x = 4 \rangle\end{aligned}$$

Vi använder inte likhetstecken mellan utsagor, utan istället används ekvivalenser. För en utsaga som alltid är sann kan vi skriva

$$\langle 7 \text{ är större än } 5 \rangle \iff \mathbb{S}$$

Uttrycken “om”, “endast om” och “om och endast om” används ibland för att prata om implikationer och ekvivalenser. Vi kan översätta på följande sätt

$$\begin{aligned}\langle 2 - x = 1 \rangle &\iff \langle x = 1 \rangle && \text{“} 2 - x = 1 \text{ om och endast om } x = 1 \text{”} \\ \langle x = 7 \rangle &\implies \langle x > 0 \rangle && \text{“} x > 0 \text{ om } x = 7 \text{”} \\ &&& \text{“} x = 7 \text{ endast om } x > 0 \text{”}\end{aligned}$$

1.2 Och, eller, inte

Utsagor kan kombineras genom “och”- och “eller”-operatorerna. Vi börjar med och-operatorn, som betecknas $\wedge$. Om a och b är utsagor, så är $a \wedge b$ utsagan “ a och b ”, som är sann om och endast om både a och b är sanna;

$$\begin{aligned}\langle x \geq 0 \rangle \wedge \langle x < 4 \rangle &\iff \langle 0 \leq x < 4 \rangle \\ \langle x \text{ delbart med } 4 \rangle \wedge \langle x \text{ jämnt} \rangle &\iff \langle x \text{ delbart med } 4 \rangle \\ \langle x - 4 < 0 \rangle \wedge \langle x > 4 \rangle &\iff \mathbb{F}.\end{aligned}$$

Vi går vidare till eller-operatorn; $a \vee b$ betyder “ a eller b ”, som är sann om och endast om minst en av a och b är sann;

$$\begin{aligned}\langle x \geq 0 \rangle \vee \langle x < 4 \rangle &\iff \langle x \text{ ett reellt tal} \rangle \\ \langle x \text{ delbart med } 4 \rangle \vee \langle x \text{ jämnt} \rangle &\iff \langle x \text{ jämnt} \rangle \\ \langle x - 4 < 0 \rangle \vee \langle x > 4 \rangle &\iff \langle x \neq 4 \rangle\end{aligned}$$

För ett enskilt uttryck kan vi använda negationsoperatorn. Utsagan $\neg a$ är sann om och endast om a är falsk;

$$\begin{aligned}\neg \langle x = 4 \rangle &\iff \langle x \neq 4 \rangle, \\ \neg \langle x < 0 \rangle &\iff \langle x \geq 0 \rangle.\end{aligned}$$

1.3 Symbolerna $\exists$ och $\forall$

Symbolen $\exists$ utläses “det finns”, och används ofta inom utsagor för att slippa skriva så mycket. Vi kan då till exempel skriva

$$\langle x^2 - 4x + 1 = 0 \text{ har en lösning} \rangle \iff \langle \exists x : x^2 - 4x + 1 = 0 \rangle.$$

Symbolen $\forall$ utläses "för alla", och vi kan skriva

$$\langle x^2 - 4x + 1 = 0 \text{ saknar lösning} \rangle \iff \langle \forall x : x^2 - 4x + 1 \neq 0 \rangle.$$

Generellt kan vi säga att om $p(x)$ är en öppen utsaga, så är

$$\neg \langle \exists x : p(x) \rangle \iff \langle \forall x : \neg p(x) \rangle$$

1.4 Ett enkelt bevis

Låt oss titta på ett bevis (egentligen bara en lösning av en ekvation, men vi kommer använda lite mer bevisspråk).

Sats 1. Om $x^2 - 4x + 3 = 0$, så är $x = 1$ eller $x = 3$.

Bevis. Antag att x är ett reellt tal sådant att $x^2 - 4x + 3 = 0$. Genom att kvadratkomplettera har vi att

$$0 = x^2 - 4x + 3 = (x - 2)^2 - 1.$$

Alltså är $(x - 2)^2 = 1$, vilket gäller om $x - 2 = 1$ eller $x - 2 = -1$. I det första fallet får vi $x = 3$, i det andra fallet $x = 1$. $\square$

Svårare behöver det inte vara att skriva ett bevis. Satsen består av en implikation $p \implies q$, där

$$\begin{aligned} p &: \langle x^2 - 4x + 3 = 0 \rangle \\ q &: \langle x = 1 \rangle \vee \langle x = 3 \rangle. \end{aligned}$$

För att bevisa $p \implies q$ (vilket inte är direkt uppenbart), så fyller vi på med fler implikationer, där varje steg ska vara mer eller mindre uppenbart. Beviset är

$$\begin{aligned} \langle x^2 - 4x + 3 = 0 \rangle &\implies \langle (x - 2)^2 - 1 = 0 \rangle \\ &\implies \langle x - 2 = 1 \rangle \vee \langle x - 2 = -1 \rangle \\ &\implies \langle x = 3 \rangle \vee \langle x = 1 \rangle. \end{aligned}$$

Vi har brytit ner satsen till en kedja av mer eller mindre uppenbara implikationer. Det är förstås upp till var och en vad som räknas som uppenbart.

2 Mängder

En *mängd* är möjligen det mest grundläggande konceptet inom matematik. I grund och botten är en mängd en samling objekt (vi kallar objekten *element*). En mängd betecknas med måsvingar, $\{\}$. Mängder som innehåller

några få element kan vi beskriva genom att lista innehållet (med punkter om det finns ett uppenbart mönster)

$$\{1, 2, 4, 8\}, \{a, b, c, \dots, \ddot{o}\}, \{\text{gul, svart, vit}\}.$$

Två mängder är lika om och endast om de innehåller samma element, och framförallt spelar det ingen roll vilken ordning elementen skrivs i eller hur många gånger de är med:

$$\{2, 1, 2, 2, 4, 2, 8, 4, 1, 2\} = \{1, 2, 4, 8\}.$$

Symbolen¹ $\in$ används för att visa om ett element tillhör mängden. Vi har $2 \in \{1, 2, 4, 8\}$ men $3 \notin \{1, 2, 4, 8\}$. Symbolen $\in$ utläses "tillhör".

Det finns några standardmängder för tal. Viktigast är heltalen $\mathbb{Z}$, de rationella talen $\mathbb{Q}$, de reella talen $\mathbb{R}$ samt de komplexa talen $\mathbb{C}$. De positiva reella talen kan beskrivas som en mängd

$$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}.$$

Detta är ett exempel på hur mängder kan beskrivas med hjälp av utsagor. Beskrivningen följer mallen

$$M = \{x \in A \mid p(x)\}$$

där A är en mängd och $p(x)$ en öppen utsaga som beror på x . Mängden M är "mängden av x i A sådana att $p(x)$ är sann". Vi kan till exempel skriva

$$\begin{aligned} \{x \in \mathbb{R} \mid x - 3 = 2\} &= \{5\}, \\ \{x \in \mathbb{Z} \mid x > 0 \text{ ensiffrigt}\} &= \{1, 2, \dots, 9\}, \\ \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq 0\} &= \mathbb{R}, \\ \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 = 2\} &= \emptyset. \end{aligned}$$

I det sista exemplet ser vi *den tomma mängden*, mängden som inte innehåller något element². Denna betecknas $\emptyset$, och är smidig att ha med som ett "nollobjekt" inom mängdlära på samma sätt som nollan är bra att ha med i aritmetik.

Låt oss se hur vi kan definiera de rationella talen utifrån heltalen:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}.$$

Här följer mängdbeskrivningen en lite annan formel.

$$\{\text{formel med obekanta} \mid \text{mängdtillhörighet för de obekanta}\}.$$

¹Symbolen $\in$ är inte en bokstav i något alfabet utan används bara för mängder.

²Som bekant är $\sqrt{2}$ ett irrationellt tal.

Detta illustreras med några exempel:

$$\begin{aligned} A &= \{a + b \mid a, b \in \{0, 1\}\} = \{0, 1, 2\} \\ \{x^2 \mid x \in \mathbb{R}\} &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} \\ \{x^2 \mid x \in A\} &= \{0, 1, 4\}. \end{aligned}$$

De två mängdbeskrivningsformaten som jag givit är de vanligaste, men så länge det är tydligt vad som menas finns en hel del frihet i hur mängder beskrivs.

2.1 Snitt, union, mängddifferens

Det finns en direkt koppling mellan mängder och logik. Detta kommer bli tydligt när vi nu börjar kombinera mängder. Först ut är snittet mellan två mängder; om A, B är mängder så är $A \cap B$ en mängd bestående av de element som ingår i både A och B .

$$\begin{aligned} \{1, 2, 4, 8\} \cap \{1, 2, 3\} &= \{1, 2\}, \\ \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ jämnt}\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} &= \{0, 2, 4, 6, \dots\}, \\ \mathbb{Q} \cap \mathbb{R} &= \mathbb{Q}, \\ \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 2\} \cap \mathbb{Q} &= \emptyset. \end{aligned}$$

Uttrycket $A \cap B$ läses “ A snitt B ”, men vi kan lika gärna tänka “ A och B ”. För att se kopplingen till satslogik tydligt kan vi till exempel se att om $p(x), q(x)$ är öppna utsagor så är

$$\{x \in \mathbb{R} \mid p(x)\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid q(x)\} = \{x \in \mathbb{R} \mid p(x) \wedge q(x)\}.$$

Näst på tur är unionen $A \cup B$ av två mängder. Mängden $A \cup B$ består av de element som ingår i minst en av A och B , till exempel

$$\begin{aligned} \{1, 2, 4, 8\} \cup \{1, 2, 3\} &= \{1, 2, 3, 4, 8\}, \\ \mathbb{Q} \cup \mathbb{R} &= \mathbb{R}, \\ \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 2\} \cup \mathbb{Q} &= \{x \in \mathbb{R} \mid \langle x \text{ rationellt} \rangle \vee \langle x = \pm\sqrt{2} \rangle\} \end{aligned}$$

Kopplingen till eller-operatorn $\vee$ bör vara tydlig:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid p(x)\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid q(x)\} = \{x \in \mathbb{R} \mid p(x) \vee q(x)\}.$$

Slutligen kan vi definiera mängddifferens. Mängden $A \setminus B$ består av de element som tillhör A , men inte B . Vi kan skriva

$$A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}.$$

Med satslogiska definitioner får vi att

$$\{x \in \mathbb{R} \mid p(x)\} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid q(x)\} = \{x \in \mathbb{R} \mid p(x) \wedge \neg q(x)\}.$$

2.2 Delmängder, komplement

Vi säger att A är en *delmängd* till B om alla element i A tillhör B , och skriver då $A \subseteq B$. Med hjälp av utsagor kan vi skriva

$$\begin{aligned}\langle A \text{ delmängd till } B \rangle &\Longleftrightarrow \langle A \subseteq B \rangle \\ &\Longleftrightarrow \langle \forall x \in A : x \in B \rangle \\ &\Longleftrightarrow \langle x \in A \implies x \in B \rangle.\end{aligned}$$

Komplementet till en mängd A betecknas $\overline{A}$, och består av de element som inte tillhör A :

$$\langle x \in \overline{A} \rangle \Longleftrightarrow \neg \langle x \in A \rangle.$$

Begreppet komplement kräver en underförstådd grundmängd, som oftast är $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$. Om vi till exempel skriver $\overline{\mathbb{R}}$, så kan det betyda den tomma mängden (om $\mathbb{R}$ är vår grundmängd) eller

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} = \{a + bi \mid b \neq 0\},$$

om $\mathbb{C}$ är grundmängden. Oftast är det intuitivt tydligt vilken grundmängd vi använder, och ofta spelar det ingen roll, men om det uppstår otydlighet kan vi alltid använda differens istället;

$$\langle x \in \overline{A} \rangle \Longleftrightarrow \langle x \in \Omega \setminus A \rangle,$$

där Ω är vår grundmängd.

3 Bevisanalys

Låt oss betrakta följande sats.

Sats 2. *Låt A, B vara mängder. Då är $A \cap B = A$ om och endast om $A \cup B = B$.*

Det här är en ekvivalenssats, som består av två olika implikationer;

- (a) $\langle A \cap B = A \rangle \implies \langle A \cup B = B \rangle$
- (b) $\langle A \cup B = B \rangle \implies \langle A \cap B = A \rangle$.

Vi börjar med att visa (a). Innan vi börjar kan vi fundera på varför den är sann. Om vi antar att $A \cap B = A$, hur förhåller sig mängderna? Rita ett Venndiagram. Om $A \cap B = A$ så måste A ligga helt och hållet i B . Men då är ju $A \cup B = B$. Vi skriver ett formellt bevis.

Bevis av (a). Antag att A, B är mängder med $A \cap B = A$. Eftersom $A \cap B \subseteq B$, så har vi $A \subseteq A \cap B \subseteq B$. Då är $A \cup B = B$. $\square$

Analys. Vi gjorde ett kort bevis som länkar påståendena via påståendet $A \subseteq B$:

$$\begin{aligned}\langle A \cap B = A \rangle &\implies \langle A \subseteq B \rangle \\ &\implies \langle A \cup B = B \rangle\end{aligned}$$

När vi nu ska bevisa den motsatta implikationen så kan vi kolla på beviset vi just gjorde. Går implikationerna att vända? Svaret är ja;

$$\begin{aligned}\langle A \cup B = B \rangle &\implies \langle A \subseteq B \rangle \\ &\implies \langle A \cap B = A \rangle.\end{aligned}$$

Vi kan skriva ett bevis för hela satsen istället för att bryta upp det i två delar.

Bevis av Sats 2. Enligt definitionen av snitt gäller

$$\begin{aligned}\langle A \cap B = A \rangle &\iff \langle \text{varje element i } A \text{ tillhör } B \rangle \\ &\iff \langle A \subseteq B \rangle.\end{aligned}$$

Enligt definitionen av union gäller även

$$\begin{aligned}\langle A \cup B = B \rangle &\iff \langle \text{inget element i } A \text{ ligger utanför } B \rangle \\ &\iff \langle A \subseteq B \rangle.\end{aligned}$$

□

Sats 3. Låt A, B vara mängder. Då är

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Om vi vill formulera satsen med hjälp av implikationer, kan vi istället formulera den som

$$\langle x \in \overline{A \cup B} \rangle \iff \langle x \in \overline{A} \cap \overline{B} \rangle.$$

För att komma fram till ett bevis, är en bra start att rita ett Venndiagram. Vi kan också börja skriva ner ekvivalenser:

$$\begin{aligned}\langle x \in \overline{A \cup B} \rangle &\iff \langle x \notin A \cup B \rangle \\ &\iff \langle x \notin A \rangle \wedge \langle x \notin B \rangle \\ &\iff \langle x \in \overline{A} \rangle \wedge \langle x \in \overline{B} \rangle \\ &\iff \langle x \in \overline{A} \cap \overline{B} \rangle.\end{aligned}$$

Här har vi i princip ett färdigt bevis. Det som saknas för att göra det till ett bra bevis är förklaringar till alla ekvivalensspilar. Vi kan göra det lätt för oss och skriva det som en steglista.

Bevis av Sats 3.

$$\begin{aligned}
 \langle x \in \overline{A \cup B} \rangle &\stackrel{(a)}{\iff} \langle x \notin A \cup B \rangle \\
 &\stackrel{(b)}{\iff} \langle x \notin A \rangle \wedge \langle x \notin B \rangle \\
 &\stackrel{(a)}{\iff} \langle x \in \overline{A} \rangle \wedge \langle x \in \overline{B} \rangle \\
 &\stackrel{(c)}{\iff} \langle x \in \overline{A} \cap \overline{B} \rangle.
 \end{aligned}$$

Ekvivalenserna håller enligt följande:

- (a) Definitionen av komplement.
- (b) Definitionen av union.
- (c) Definitionen av snitt.

□

4 Bevistekniker

Anta att vi vill bevisa att $p \implies q$, för två öppna utsagor p, q . Då finns tre huvudsakliga tekniker.

- **Direkt bevis.** Vi länkar ihop implikationen $p \implies q$ med en eller flera utsagor $r_1, \dots, r_k$, så att kedjan

$$p \implies r_1 \implies r_2 \implies \dots \implies r_k \implies q$$

bara innehåller implikationer som är lätta att förstå.

- **Motsägelsebevis.** Vi antar att p och $\neg q$ är sanna, och härleder ett falsk påstående. Vi visar med andra ord att $p \wedge \neg q \implies \mathbb{F}$. Schematiskt gör vi beviset

$$p \wedge \neg q \implies r_1 \implies \dots \implies r_k \implies \mathbb{F},$$

där varje $\implies$ är ett enkelt steg.

- **Kontrapositivt argument.** Istället för att visa att $p \implies q$, så visar vi att $\neg q \implies \neg p$. Detta är ekvivalent:

$$\langle p \implies q \rangle \iff \langle \neg q \implies \neg p \rangle.$$

För att visa att $\neg q \implies \neg p$, kan vi använda direkt bevis eller motsägelsebevis.

Det finns andra bevistekniker, till exempel **induktionsbevis**: anta att $p(n)$ är ett öppet påstående där den obekanta n är ett heltal. För att visa att $p(n)$ är sant för alla $n \geq 1$, så visar vi att $p(1)$ är sann, och att $p(n) \implies p(n+1)$ för varje $n \geq 1$.

4.1 Exempel på motsägelsebevis

Vi återgår till en del av beviset för Sats 2. Där visade vi att

$$\langle A \cap B = A \rangle \implies \langle A \cap B = B \rangle.$$

Låt oss ta fram ett motsägelsebevis för denna implikationen. Antag att $A \cap B = A$ och att $A \cup B \neq B$. Eftersom $B \subseteq A \cup B$, måste det då finnas något $x \in A \cup B$ sådant att $x \notin B$. Med andra ord är $x \in A \setminus B$. Men då är $x \in A \setminus (A \cap B)$, vilket motsäger $A \cap B = A$.

Schematiskt kan vi skriva

$$\begin{aligned} & \langle A \cap B = A \rangle \wedge \langle A \cup B \neq B \rangle \\ & \xRightarrow{(a)} \langle A \cap B = A \rangle \wedge \langle \exists x \in (A \cup B) \setminus B \rangle \\ & \xRightarrow{(b)} \langle A \cap B = A \rangle \wedge \langle \exists x \in A \setminus B \rangle \\ & \xRightarrow{(c)} \langle A \cap B = A \rangle \wedge \langle \exists x \in A \setminus (A \cap B) \rangle \\ & \xRightarrow{(d)} \mathbb{F}. \end{aligned}$$

Förklaringar för stegen är som följer:

1. $B \subseteq A \cup B$ gäller alltid, så om $A \cup B \neq B$ så är $(A \cup B) \setminus B \neq \emptyset$.
2. $(A \cup B) \setminus B = A \setminus B$.
3. $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$.
4. De två påståendena motsäger varandra.

4.2 Exempel på kontrapositivt argument

Vi bevisar implikationen $\langle A \cap B = A \rangle \implies \langle A \cup B = B \rangle$ igen, nu med kontrapositivt argument. Det ser ut såhär, och har många likheter med motsägelseargumentet:

$$\begin{aligned} & \langle A \cup B \neq B \rangle \\ & \implies \langle \exists x \in (A \cup B) \setminus B \rangle \\ & \implies \langle \exists x \in A \setminus B \rangle \\ & \implies \langle \exists x \in A \setminus (A \cap B) \rangle \\ & \implies \langle A \cap B \neq A \rangle. \end{aligned}$$

Övningar

1. Fyll i alla korrekta implikationspilar i följande.

- | | | |
|-----|--|--------------------------------------|
| (a) | $\langle x \in A \rangle \wedge \langle A \subseteq B \rangle$ | $\langle x \in B \rangle$ |
| (b) | $\langle x^2 = 0 \rangle$ | $\langle x = 0 \rangle$ |
| (c) | $\langle x^2 = 4 \rangle$ | $\langle x = 2 \rangle$ |
| (d) | $\langle A \cap B = \emptyset \rangle$ | $\langle \bar{A} \cap B = B \rangle$ |

2. Fyll i logiska operatorer, alltså $\vee$ (eller), $\wedge$ (och) samt $\neg$ (inte) så att följande implikationer och ekvivalenser blir sanna.

- | | | |
|-----|---|--|
| (a) | $\langle x \geq 4 \rangle$ | $\langle x^2 = 16 \rangle \implies \langle x = 4 \rangle$ |
| (b) | $\langle x \in A \rangle$ | $\langle x \notin B \rangle \iff \langle x \in A \cap B \rangle$ |
| (c) | $\langle x \leq 3 \rangle$ | $\langle x \geq -3 \rangle \iff \neg \langle x^2 \leq 9 \rangle$ |
| (d) | $\langle \exists x \in A : x \in B \rangle$ | $\langle \forall x \in A : x \in B \rangle \implies \langle A = \emptyset \rangle$ |

3. Para ihop mängderna (a)–(d) med (i) – (iv).

- | | |
|---|---------------------------------------|
| (a) $\{x - y \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ | (i) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ |
| (b) $\{e^x \mid x \in \mathbb{R}\}$ | (ii) $\emptyset$ |
| (c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 = 0\}$ | (iii) $\{0\}$ |
| (d) $\{x - x \mid x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$ | (iv) $\mathbb{R}$ |

4. I definitionen av delmängd såg vi hur implikationer kan användas även inom utsagor:

$$\langle A \subseteq B \rangle \iff \langle x \in A \implies x \in B \rangle.$$

Vilka påståenden om mängderna A och B görs med följande utsagor?

- (a) $\langle x \in A \implies x \notin B \rangle$,
 (b) $\langle x \in A \iff x \in B \rangle$.

5. (a) Låt p, q vara utsagor, och övertyga dig själv om att

$$\neg(p \vee q) \iff \neg p \wedge \neg q$$

(b) I beviset av Sats 3 gjorde vi steget

$$\langle x \notin A \cup B \rangle \iff \langle x \notin A \rangle \wedge \langle x \notin B \rangle.$$

Om man tycker att detta inte är uppenbart, så kan man fylla ut beviset med några fler steg. Vilka är de saknade stegen i följande?

$$\begin{aligned}
 &\langle x \notin A \cup B \rangle \\
 &\iff \\
 &\iff \neg(\langle x \in A \rangle \vee \langle x \in B \rangle) \\
 &\iff \\
 &\iff \langle x \notin A \rangle \wedge \langle x \notin B \rangle.
 \end{aligned}$$

6. Skriv ett schematiskt bevis för ekvivalensen

$$\langle x^3 - x^2 + 4x - 4 = 0, x \in \mathbb{R} \rangle \iff \langle x = 1 \rangle.$$

Förklara alla implikations/ekvivalenspilar.

Tips. Använd faktoriseringen $x^3 - x^2 + 4x - 4 = (x - 1)(x^2 + 4)$.

7. Visa att

$$\langle A \cap B = \emptyset \rangle \wedge \langle \overline{A} \cap B = \emptyset \rangle \iff \langle B = \emptyset \rangle.$$

Tips. Det finns flera sätt. Ett sätt är att göra ett motsägelsebevis, genom att anta att $A \cap B = \emptyset$ och $\overline{A} \cap B = \emptyset$, samt att det finns något element $x \in B$. Härled en motsägelse.

5 Lösningar

1.

- (a) $\langle x \in A \rangle \wedge \langle A \subseteq B \rangle \implies \langle x \in B \rangle$
- (b) $\langle x^2 = 0 \rangle \iff \langle x = 0 \rangle$
- (c) $\langle x^2 = 4 \rangle \iff \langle x = 2 \rangle$
- (d) $\langle A \cap B = \emptyset \rangle \iff \langle \overline{A} \cap B = B \rangle$

2.

- (a) $\langle x \geq 4 \rangle \wedge \langle x^2 = 16 \rangle \implies \langle x = 4 \rangle$
- (b) $\langle x \in A \rangle \wedge \neg \langle x \notin B \rangle \iff \langle x \in A \cap B \rangle$
- (c) $\neg \langle x \leq 3 \rangle \vee \neg \langle x \geq -3 \rangle \iff \neg \langle x^2 \leq 9 \rangle$
- (d) $\neg \langle \exists x \in A : x \in B \rangle \wedge \langle \forall x \in A : x \in B \rangle \implies \langle A = \emptyset \rangle$

3. (a) $\{x - y \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$.

(b) $\{e^x \mid x \in \mathbb{R}\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$. Båda beskriver mängden av positiva tal.

(c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 = 0\} = \emptyset$.

(d) $\{x - |x| \mid x \in \mathbb{R}, x \geq 0\} = \{0\}$.

4. (a) $\langle x \in A \implies x \notin B \rangle \iff \langle A \cap B = \emptyset \rangle$.

(b) $\langle x \in A \iff x \in B \rangle \iff \langle A = B \rangle$.

5. (a) Det finns fyra olika utfall; p och q är båda falska; p är sann och q falsk; p är falsk och q sann; p och q är båda sanna. Vi kollar av att de två uttrycken får samma sanningsvärde i alla fyra fall:

p	q	$p \vee q$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg(p \vee q)$
F	F	F	S	S	S	S
S	F	S	F	S	F	F
F	S	S	S	F	F	F
S	S	S	F	F	F	F

Detta visar att $\neg p \wedge \neg q \iff \neg(p \vee q)$.

(b)

$$\begin{aligned}
 &\langle x \notin A \cup B \rangle \\
 &\iff \neg \langle x \in A \cup B \rangle \\
 &\iff \neg(\langle x \in A \rangle \vee \langle x \in B \rangle) \\
 &\iff \neg \langle x \in A \rangle \wedge \neg \langle x \in B \rangle \\
 &\iff \langle x \notin A \rangle \wedge \langle x \notin B \rangle.
 \end{aligned}$$

6. För $x \in \mathbb{R}$ gäller att

$$\begin{aligned} & \langle x^3 - x^2 + 4x - 4 = 0 \rangle \\ & \iff \langle (x-1)(x^2+4) = 0 \rangle \\ & \iff \langle x-1=0 \rangle \vee \langle x^2+4=0 \rangle \\ & \iff \langle x-1=0 \rangle \\ & \iff \langle x=1 \rangle. \end{aligned}$$

Här kan vi ta bort utsagan $\langle x^2+4=0 \rangle$, eftersom den alltid är falsk för reella x (vi kan generellt säga att $p \vee \mathbb{F} \iff p$). Förutom det kan alla steg betraktas som uppenbara.

Jag valde ovan att ange att $x \in \mathbb{R}$ i början av beviset, istället för att ta med det i själva ekvivalenskedjan. Vi kan skriva såhär också:

$$\begin{aligned} & \langle x^3 - x^2 + 4x - 4 = 0, x \in \mathbb{R} \rangle \\ & \iff \langle (x-1)(x^2+4) = 0, x \in \mathbb{R} \rangle \\ & \iff \langle x-1=0, x \in \mathbb{R} \rangle \vee \langle x^2+4=0, x \in \mathbb{R} \rangle \\ & \iff \langle x-1=0, x \in \mathbb{R} \rangle \\ & \iff \langle x=1 \rangle. \end{aligned}$$

7. Ett motsägelsebevis får vi såhär. Om $B \neq \emptyset$ så kan vi välja något $x \in B$. Då är

$$\begin{aligned} & \langle A \cap B = \emptyset \rangle \wedge \langle \overline{A} \cap B = \emptyset \rangle \wedge \langle x \in B \rangle \\ & \implies \langle x \notin \overline{A} \rangle \wedge \langle x \in A \rangle \\ & \implies \mathbb{F}. \end{aligned}$$

I detta fallet kan det vara enklare att skriva beviset i ord:

Bevis. Antag $A \cap B = \emptyset$, $\overline{A} \cap B = \emptyset$, samt att $B \neq \emptyset$. Då finns något element $x \in B$. Eftersom $A \cap B = \emptyset$, så gäller $x \notin A$. Men eftersom $\overline{A} \cap B = \emptyset$ gäller även $x \notin \overline{A}$. Detta är en motsägelse.