

LÖSNINGSFÖRSLAG TILL
TMA227 – Matematisk fördjupning
LGMA62 – Matematik 6 för gymnasielärare

Inga hjälpmedel tillåtna

Betyg LGMA62: 24p för G, 42p för VG

Betyg TMA227: 24p för 3, 36p för 4, 48p för 5.

Bonuspoäng från duggan läggs till resultatet i den här tentan. Motivera alla svar noggrant.

1. Beräkna konvergensradien till potensserien $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^k}{k!} x^k$.

Lösningssförslag: Använd t.ex. kvotformeln för konvergensradie. Om $a_k = k^k/k!$ får vi

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+1)^{k+1}}{(k+1)!} \frac{k!}{k^k} = \frac{(k+1)^k}{k^k} = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k,$$

och $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = e$, så kvotformeln för konvergensradie ger att denna är e^{-1} . (Gränsvärdet av $(1 + 1/k)^k$ är ett standardgränsvärde som man får använda direkt, men det går också att se genom att skriva

$$\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = e^{k \log(1+1/k)},$$

och då följer gränsvärdet av Taylorutvecklingen av $\log(1+t) = t + \frac{1}{1+\theta}t^2$ där $0 < \theta < 1$)

2. Bestäm den allmänna lösningen till rekurrens ekvationen

$$y_{n+2} - 2y_n = n^3$$

Lösningssförslag: Den karakteristiska ekvationen är $r^2 - 2 = 0$, som har lösningar $r_{1,2} = \pm\sqrt{2}$. Därför är den allmänna lösningen till den homogena differens ekvationen

$$y_n^h = A2^{n/2} + B(-1)^n 2^{n/2}$$

Eftersom högerledet är ett polynom av grad 3, och rötterna till den karakteristiska ekvationen inte är 1 ansätter vi en partikulärlösning i formen av ett tredjegrads polynom:

$$y_n^p = an^3 + bn^2 + cn + d$$

$$\begin{aligned} y_{n+2}^p &= a(n+2)^3 + b(n+2)^2 + c(n+2) + d \\ &= an^3 + (6a+b)n^2 + (12a+4b+c)n + (8a+4b+2c+d) \end{aligned}$$

Så

$$y_{n+2}^p - 2y_n^p = -an^2 + (6a-b)n^2 + (12a+4b-c)n + 8a+4b+2c-d$$

Av detta följer att $a = -1$, $b = -6$, $c = -36$ och $d = -104$. Så den allmänna lösningen är

$$y = -n^3 - 6n^2 - 36n - 104 + (A + B(-1)^n) 2^{n/2}$$

3. Avgör om följande talserier är divergenta, betingat konvergenta eller absolutkonvergenta:

a)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin(k\pi/2) e^{-k}$$

b)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\pi/2)}{k}$$

Lösningssförslag:

a) $|\sin(k\pi/2)e^{-k}| \leq e^{-k}$, så jämförelsekriteriet ger att serien är absolutkonvergent eftersom $\sum_{k=1}^{\infty} (1/e)^k$ är konvergent.

b) Serien kan skrivas

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}.$$

Denna är inte absolutkonvergent eftersom $|(-1)^{k-1}/(2k-1)| \geq 1/(2k)$ och $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ är divergent, och då medför jämförelsekriteriet att den första serien också är divergent.

Men $1/(2k-1)$ är avtagande, så då får vi en alternerande serie med avtagande termer, och Leibnitz konvergenzkriterium medför att serien är konvergent. Alltså är serien betingat konvergent.

4. Bestäm

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos(x/n) + \sin(x/n)} dx.$$

Lösningssförslag: Eftersom $\cos(x/n) \rightarrow 1$ och $\sin(x/n) \rightarrow 0$ då $n \rightarrow \infty$ får vi att $e^{\cos(x/n) + \sin(x/n)}$ konvergerar punktvis mot e då $n \rightarrow \infty$. I själv verket är denna konvergens likformig i intervallet $x \in [-\pi, \pi]$: Funktionerna e^x , $\sin x$ och $\cos x$ är kontinuerliga, så den sammansatta funktionen är också kontinuerlig. För varje $\epsilon > 0$ finns alltså ett $\delta > 0$ så att $|e^{\cos(x/n) + \sin(x/n)} - e| < \epsilon$ om $|x/n| < \delta$. Men eftersom $|x| \leq \pi$ räcker det att välja $n > \pi/\delta$ för att detta skall vara uppfyllt. Och det gäller oberoende av x , så konvergensen är likformig i intervallet. (Däremot är det inte likformig konvergens om man betraktar funktionen för alla $x \in \mathbb{R}$). Nu medför satsen om att byta ordning på gränsvärde och integration för likformigt konvergenta funktionsföljder att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos(x/n) + \sin(x/n)} dx = \int_{-\pi}^{\pi} e dx = 2\pi e.$$

5. Låt $\mathcal{P}_3$ vara det linjära rummet av reella polynom av grad högst 3. Låt $F : \mathcal{P}_3 \rightarrow \mathcal{P}_3$ vara avbildningen som är definierad av

$$F(p) = x^2 p''(x) \text{ för } p(x) \in \mathcal{P}_3.$$

Bestäm $V(F)$ och $N(F)$.

Lösningssförslag: Ett tredjegradspolynom kan skrivas $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, där a, b, c, d är reella konstanter. Då är $p''(x) = 6ax + 2b$, och alltså $x^2 p''(x) = 6ax^3 + 2bx^2$. Alltså är

$$N(F) = \{p(x) = cx + d \mid c, d \in \mathbb{R}\}$$

och

$$V(F) = \{p(x) = Ax^3 + Bx^2 \mid A, B \in \mathbb{R}\}$$

Både $V(F)$ och $N(F)$ har dimension 2, och $\mathcal{P}$ har dimension 4, så detta stämmer med vad dimensionssatsen säger.

6. Låt V vara rummet av kontinuerligt deriverbara funktioner på intervallet $[0, 1]$. Visa att

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 (f(x)g(x) + f'(x)g'(x)) dx$$

är en skalärprodukt på V .

Lösningssförslag: Man ser lätt att $\langle f, g \rangle$ är symmetrisk, och linjär i första argumentet:

$$\langle \alpha f + \beta g, h \rangle = \alpha \langle f, h \rangle + \beta \langle g, h \rangle$$

för alla $f, g, h \in V$ och $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Detta följer direkt från definitionen av integralen och de vanliga räknereglererna för funktioner. Det återstår att visa att $\langle f, f \rangle \geq 0$ och att $\langle f, f \rangle = 0$ bara om $f(x) = 0$ för alla x . Men det ser man också lätt eftersom

$$\langle f, f \rangle \geq \int_0^1 (f(x)f(x)) \, dx.$$

Funktionen $f(x)^2$ är större eller lika med 0, så integralen är också positiv, och 0 bara om funktionen är 0 för alla x . Alltså är $\langle f, g \rangle$ en skalärprodukt.

7. Låt V vara det linjära rummet som bildas av alla reella talföljder $(a_k)_{k=1}^\infty$ med operationerna

$$(a_k)_{k=1}^\infty + (b_k)_{k=1}^\infty = (a_k + b_k)_{k=1}^\infty$$

$$\alpha(a_k)_{k=1}^\infty = (\alpha a_k)_{k=1}^\infty,$$

där $(a_k)_{k=1}^\infty, (b_k)_{k=1}^\infty \in V$ och $\alpha \in \mathbb{R}$. Definiera sedan $W \subset V$ genom

$$W = \{(a_k)_{k=1}^\infty \in V \text{ där } a_k = 0 \text{ för alla utom ändligt många } k\}.$$

Visa att W är ett linjärt underrum till V .

Lösningssförslag: Det räcker att visa att om $a, b \in W$ och $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ så är $\alpha a + \beta b \in W$. Sätt $a = (a_k)_{k=1}^\infty$ och $b = (b_k)_{k=1}^\infty$. Eftersom både a och b ligger i W och bara har ändligt många element som är skilda från noll, så finns ett M sådant att $a_k = b_k = 0$ för $k > M$. Men då är också $\alpha a_k + \beta b_k = 0$ för $k > M$, så $\alpha a + \beta b$ har högst M element som inte är lika med 0. Alltså ligger också $\alpha a + \beta b$ i W .

8. Formulera och bevisa en sats om existens av ON-baser för ändligtdimensionella vektorrum.

Lösningssförslag: Detta är en teoriuppgift från litteraturen.