

TMA227 – Matematisk fördjupning
LGMA62 – Matematik 6 för gymnasielärare
Lösningsförslag

Inga hjälpmedel tillåtna

Betyg LGMA62: 20p för G, 35p för VG

Betyg TMA227: 20p för 3, 30p för 4, 40p för 5.

Bonuspoäng från duggan läggs till resultatet i den här tentan. Motivera alla svar noggrant.

1. Ge exempel på

a) en betingat konvergent talserie.

Lösningsförslag: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$. Denna är konvergent enligt Leibnitz konvergenzkriterium, eftersom termerna är alternerande och avtar mot 0. Den är inte absolutkonvergent: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ är divergent, vilket visas t.ex. med integralkriteriet. (3p)

b) en potensserie med konvergensradie π .

Lösningsförslag: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^k} x^k$. Om vi sätter $a_k = (1/\pi)^k$ får vi att $|a_{k+1}|/|a_k| = 1/\pi$, och då ger kvotformeln att konvergensradien är π . (3p)

Visa med lämpliga kriterier att exemplen har de efterfrågade egenskaperna.

2. Bestäm den allmänna lösningen till differensekvationen

$$y_{n+2} - 4y_{n+1} + 4y_n = 3n + 16$$

Lösningsförslag: Det karakteristiska polynomet är $r^2 - 4r + 4 = (r - 2)^2$, vilket har en dubbelrot $r = 2$. Då ges den allmänna lösningen till den homogena ekvationen av $y_n^h = (a + bn)2^n$. För att hitta en partikulärlösning antar vi $y_n^p = An + B$, och finner att då är

$$y_{n+2}^p - 4y_{n+1}^p + 4y_n^p = A(n+2) + B - 4(A(n+1) + B) + 4(An + B) = An - 2A + B$$

och alltså är $A = 3$ och $B = 16 + 2A = 22$, så allmänna lösningen är $y_n = (a + bn)2^n + 3n + 22$. (6p)

3. Bestäm Maclaurin-serien till $(1 - x)^{-3}$ t.ex. genom termvis derivering av en känd serie. Ange också konvergensradien.

Lösningsförslag: Vi vet att $(1 - x)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ för $|x| < 1$. Eftersom man får derivera inom seriens konvergensintervall gäller att

$$(1 - x)^{-2} = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}$$
$$2(1 - x)^{-3} = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)x^{k-2}$$

och alltså är $(1 - x)^{-3} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2}(k+2)(k+1)x^k = 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 \dots$ för $|x| < 1$. (6p)

4. Avgör om följande serier är konvergenta eller divergenta:

a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^4}{n^5 + 3n^2 - 1}$$

Lösningsförslag: Eftersom $n^5 + 3n^2 - 1 < n^5 + 3n^2 \leq 4n^5$ för alla $n \geq 1$ är $\frac{4n^4}{n^5 + 3n^2 - 1} \geq 1/n$ för alla $n \geq 1$, och då ger jämförelsekriteriet för positiva serier att $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^4}{n^5 + 3n^2 - 1}$ är divergent, ty $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ är divergent (detta får anses känt). (3p)

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n+1)}{4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot \dots \cdot (3n+1)}$$

Lösningsförslag: Sätt $a_n = \frac{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n+1)}{4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot \dots \cdot (3n+1)}$. Då är $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1+1}{3(n+1)+1} = \frac{n+2}{3n+4} \rightarrow 1/3$ då $n \rightarrow \infty$. Kvotkriteriet innebär att serien är konvergent eftersom $1/3 < 1$.

(3p)

5. Bestäm konvergensradien till följande potensserier:

a)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} x^n$$

Lösningsförslag: Serien kan skrivas $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ med $a_n = 1/((n+1)!)$. Alltså gäller att $|a_{n+1}|/|a_n| = 1/(n+2) \rightarrow 0$ då $n \rightarrow \infty$, vilket medför att konvergensradien för serien är ∞ , d.v.s serien konvergerar för alla $x \in \mathbb{R}$.

(3p)

b)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^n} x^n$$

Lösningsförslag: Här blir $|a_{n+1}|/|a_n| = (n+1)/(3n) \rightarrow 1/3$, då $n \rightarrow \infty$ och alltså är konvergensradien 3 och potensserien är konvergent för $|x| < 3$.

(3p)

6. Låt V vara rummet av kontinuerliga funktioner på intervallet $[0, \infty[$, och definiera skalärprodukten

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{\infty} f(x)g(x)e^{-x} dx.$$

för f och g i V . Bestäm alla polynom av grad högst 3 som är ortogonala mot polynomet $p(x) = 1 + x$.

Lösningsförslag: Genom partialintegration får vi att

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-x} dx &= 1 \\ \int_0^{\infty} x e^{-x} dx &= [-x e^{-x}]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1 \\ \int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx &= [-x^2 e^{-x}]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 2x e^{-x} dx = 2 \\ \int_0^{\infty} x^3 e^{-x} dx &= [-x^3 e^{-x}]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 3x^2 e^{-x} dx = 6 \\ \int_0^{\infty} x^4 e^{-x} dx &= [-x^4 e^{-x}]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 4x^3 e^{-x} dx = 24. \end{aligned}$$

(Så rent allmänt är $\int_0^{\infty} x^k e^{-x} dx = k!$). Ett allmänt polynom av grad högst 3 kan skrivas $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$, och med $p(x) = 1 + x$ får vi

$$\begin{aligned} \langle p, q \rangle &= \int_0^{\infty} (a + bx + cx^2 + dx^3) (1 + x) e^{-x} dx \\ &= \int_0^{\infty} (a + (a+b)x + (b+c)x^2 + (c+d)x^3 + dx^4) e^{-x} dx \\ &= a + (a+b) + 2(b+c) + 6(c+d) + 24d = 2a + 3b + 8c + 30d. \end{aligned}$$

För att få $\langle p, q \rangle = 0$ måste alltså $q(x)$ ha formen $q(x) = -\frac{3}{2}b - 4c - 15d + bx + cx^2 + dx^3$, där b, c, d kan väljas godtyckligt.

(7p)

7. Låt V vara det linjära rummet av 2×2 -matriser, och låt W vara mängden 2×2 -matriser där radsummorna är lika och kolumnsummorna är lika, d.v.s sådana att för en matris $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ gäller att $a + b = c + d$ och $a + c = b + d$. Visa att W är ett linjärt delrum till V , och ange en bas för W .

Lösningssförslag: Antag att $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$ båda ligger i W . Då gäller att $A + B = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 & a_4 + b_4 \end{pmatrix}$. Vi behöver visa att $A + B \in W$, d.v.s att $(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) = (a_3 + b_3) + (a_4 + b_4)$ och $(a_1 + b_1) + (a_3 + b_3) = (a_2 + b_2) + (a_4 + b_4)$, men det följer av att likheten gäller om man bara tar a -termerna för sig och b -termerna för sig. På samma sätt ser man att om $\lambda \in \mathbb{R}$ och $A \in W$ så gäller att $\lambda A \in W$, så W är ett linjärt underrum. Alla matriser $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ i W uppfyller alltså

$$\begin{aligned} a + b &= c + d \\ a + c &= b + d \end{aligned}$$

Om man subtraherar de två ekvationerna från varandra får man $b - c = c - b$, eller $2(b - c) = 0$, alltså $b = c$. Om man adderar de två ekvationerna och använder att $b = c$ får man $2a + 2b = 2b + 2d$, och alltså är också $a = d$. En allmän matris $C \in W$ kan då skrivas

$$C = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Man ser att de två matriserna $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ är linjärt oberoende, och de bildar en bas. (6p)

8. Formulera och bevisa en sats om gränsövergång under integraltecken vid likformig konvergens. *Lösningssförslag:* Detta är en teoriuppgift, se boken för svar. (7p)