

TMA227 – Matematisk fördjupning
LGMA62 – Matematik 6 för gymnasielärare
Förslag på lösningar

Inga hjälpmedel tillåtna

Betyg LGMA62: 20p för G, 35p för VG

Betyg TMA227: 20p för 3, 30p för 4, 40p för 5.

Bonuspoäng från duggan läggs till resultatet i den här tentan. Motivera alla svar noggrant.

1. Avgör vilka av följande serier som är konvergenta:

a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log(n)^2}$.

Förslag på lösning: Det är en positiv, avtagande serie, och integralkriteriet kan användas. Den integral man då jämför med är

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \log(x)^2} dx = \int_{\log(2)}^{\infty} \frac{1}{t^2} dt.$$

Detta är en konvergent integral (med värde $1/\log(2)$), och då medför integralkriteriet att serien är konvergent. (3p)

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+\pi}{n^2-\pi^2}$.

Förslag på lösning: Serien kan skrivas som $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ där $a_n = \frac{n+\pi}{n^2-\pi^2} = \frac{1}{n-\pi}$. För $n \geq 4$ är detta en positiv, avtagande följd, och genom Leibnitz konvergenstkriterium får vi då att $\sum_{n=4}^{\infty} (-1)^n a_n$ är konvergent, och att lägga till de tre första termerna påverkar inte konvergensten. Så serien är konvergent. (3p)

2. Låt $C([- \pi, \pi])$ vara rummet av kontinuerliga funktioner på intervallet $- \pi \leq x \leq \pi$ och definiera skalärprodukten

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx.$$

Bestäm den ortogonala projektionen av $f(x) = x$ på det linjära delrummet av $C([- \pi, \pi])$ som spänns upp av $\{1, \sin x, \cos x\}$.

Förslag på lösning: Eftersom $f(x) = x$ är en udda funktion på intervallet $[- \pi, \pi]$, och då är

$$\langle f, 1 \rangle = \langle f, \cos(x) \rangle = 0,$$

eftersom både $x \times 1$ och $x \cos(x)$ är udda funktioner.

$$\langle f, \sin(x) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(x) dx = [x(-\cos(x))]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \cos x dx = 2\pi + [\sin(x)]_{-\pi}^{\pi} = 2\pi$$

Dessutom är

$$\langle \sin(x), \sin(x) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos(2x)}{2} dx = \pi$$

så projektionen av f på det under rum som spänns upp av $\{1, \sin x, \cos x\}$ ges av

$$\frac{\langle x, \sin(x) \rangle}{\langle \sin(x), \sin(x) \rangle} \sin(x) = 2 \sin(x).$$

(6p)

3. a) För vilka reella x konvergerar potensserien $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{\log(n)}$?

Förslag på lösning: Sätt $a_n = 1/\log(n)$. Då gäller att

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\log(n)}{\log(n+1)} = \frac{\log(n)}{\log(n) + \log(1+1/n)} = \frac{1}{\log(1+1/n)/\log(n)},$$

och eftersom högerledet konvergerar mot 1 då $n \rightarrow \infty$ får vi genom kvotformeln för konvergensradie att denna är 1. Så serien konvergerar för $|x| < 1$. Då $x = 1$ är serien divergent för då har vi serien $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log(n)}$ som är divergent. För $x = -1$ får vi en alternerande serie med termer som konvergerar mot 0, och alltså medför Leibnitz kriterium att serien är konvergent då. Alltså är serien konvergent för $-1 \leq x < 1$ och divergent för andra x . (3p)

- b) Bestäm konvergensradien till serien $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n^2} x^n$.

Förslag på lösning: Sätt $a_n = 2^{n^2}$. Då blir $a_{n+1}/a_n = 2^{(n+1)^2}/2^{n^2} = 2^{(n+1)^2 - n^2} = 2^{2n+2} \rightarrow \infty$ då $n \rightarrow \infty$. Alltså är konvergensradien för serien 0. (3p)

4. Låt A vara matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -4 & 5 \\ -3 & 2 & 4 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 4 & -9 & 11 \\ 0 & 7 & 8 & -14 & 17 \end{pmatrix}.$$

Ange dimensionen för värderummet $V(A)$ och ange en bas för nollrummet $N(A)$.

Förslag på lösning: Genom radeliminering får vi

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -4 & 5 \\ -3 & 2 & 4 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 4 & -9 & 11 \\ 0 & 7 & 8 & -14 & 17 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & -9 & 11 \\ 2 & 1 & 0 & -4 & 5 \\ -3 & 2 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & 8 & -14 & 17 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & -9 & 11 \\ 0 & -7 & -8 & 14 & -17 \\ 0 & 14 & 16 & -28 & 34 \\ 0 & 7 & 8 & -14 & 17 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & -9 & 11 \\ 0 & -7 & -8 & 14 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rangen för matrisen A är alltså 2, vilket också är $\dim V(A)$. För att hitta en bas för $N(A)$ löser vi ekvationssystemet

$$\begin{aligned} x + 4y + 4z - 9u + 11v &= 0 \\ -7y - 8z + 14u - 17v &= 0, \end{aligned}$$

som kommer från den radreducerade matrisen. Vi har två ekvationer och fem obekanta. Sätt $z = 7r$, $u = 7s$, $v = 7t$. Då blir

$$\begin{aligned} y &= -8r + 14s - 17v \quad \text{och} \\ x &= -4y - 4z + 9u - 11v = 32r - 56s + 68t - 28r + 63s - 77t \\ &= 4r + 7s - 9t. \end{aligned}$$

Alltså är

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -9 \\ -17 \\ 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

En bas för $N(A)$ ges av de tre vektorerna som multiplicerar r , s och t . (7p)

5. Ange den allmänna lösningen till differensekvationen

$$y_{n+3} - 2y_{n+2} - 4y_{n+1} + 8y_n = 0.$$

(tips: man kan försöka gissa en lösning till den karaktäristiska ekvationen)

Förslag på lösning Den karaktäristiska ekvationen är $r^3 - 2r^2 - 4r + 8 = 0$. Genom att testa finner man snart att $r = 2$ är en lösning, och genom polynomdivision att ekvationen blir $(r - 2)(r^2 - 4) = 0$, eller $(r - 2)^2(r + 2) = 0$. Så $r = 2$ är en dubbelrot till den karaktäristiska ekvationen och $r = -2$ är en enkelrot. Då ges den allmänna lösningen till differensekvationen av

$$y_n = A(-2)^n + (Bn + C)2^n \quad (6p)$$

6. Låt $\mathcal{P}$ vara det linjära rummet av alla polynom (med de vanliga definitionerna av addition och skalär multiplikation), och låt $\mathcal{P}_3$ vara mängden av polynom av grad högst tre. Låt U vara mängden av polynom av grad högst 6 som bara har jämna potenser. (så till exempel $p(x) = 1 + x + x^3 \in \mathcal{P}_3$, och $q(x) = 2.5 + x^2 - 0.9x^6 \in U$, men $p(x) \notin U$ och $q(x) \notin \mathcal{P}_3$)

- a) Visa att $\mathcal{P}_3$ och U är linjära underrum till $\mathcal{P}$.

Förslag på lösning: Polynomet $p = 0$ ligger i både $\mathcal{P}_3$ och i U . Om $p_1 \in \mathcal{P}_3$ och $p_2 \in \mathcal{P}_3$, d.v.s är polynom av grad högst 3, så gäller samma sak för $p_1 + p_3$ och för ap_1 där a är en godtycklig reell konstant. Av detta följer att $\mathcal{P}_3$ är ett linjärt underrum till rummet av alla polynom. Antag nu att $q_1 \in U$ och $q_2 \in U$, d.v.s. $q_1(x) = a_1 + b_1x^2 + c_1x^4 + d_1x^6$ och $q_2(x) = a_2 + b_2x^2 + c_2x^4 + d_2x^6$ för reella koefficienter $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2$. Då är $q_1(x) + q_2(x) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)x^2 + (c_1 + c_2)x^4 + (d_1 + d_2)x^6$, så $q_1 + q_2 \in U$. Samma gäller om man multiplicerar q_1 med en konstant. Så U är också ett linjärt underrum. (4p)

- b) Bestäm en bas till det underrum av $\mathcal{P}$ som ges av summan $\mathcal{P}_3 + U$.

Förslag på lösning: Om $p \in \mathcal{P}_3$ och $q \in U$ kan vi skriva

$$\begin{aligned} p(x) &= a + bx + cx^2 + dx^3 \\ q(x) &= A + Bx^2 + Cx^4 + Dx^6, \end{aligned}$$

så $p + q$ ges av

$$(a + A) + bx + (c + B)x^2 + dx^3 + Cx^4 + Dx^6$$

Alltså kan alla element i $\mathcal{P}_3 + U$ skrivas som en linjärkombination av $1, x, x^2, x^3, x^4$ och x^6 . Dessa sex polynom är linjär oberoende eftersom de har olika grad och de bildar alltså en bas för $\mathcal{P}_3 + U$. (3p)

7. Låt A vara en $m \times n$ -matris, och låt $b \in \mathbb{R}^m$. Antag att ekvationen $Ax = b$ har en lösning. Visa att det inte kan finnas en lösning till $A^T y = 0$ som uppfyller $y^T b \neq 0$.

Förslag på lösning: Antag att $A^T y = 0$. Då är också $y^T A = 0$. Och $Ax = b$ medför att $y^T Ax = y^T b$, och om $y^T A = 0$ måste också $y^T Ax = 0$, d.v.s. $y^T b = 0$. Alltså är det omöjligt att samtidigt hitta x som löser $Ax = b$ och y som löser $A^T y = 0$ och uppfyller $y^T b \neq 0$. (6p)

8. Formulera och bevisa Weierstrass majorantsats.

Förslag på lösning: Se kurslitteraturen för svar. (6p)