

Sats: Låt X vara kont. s. med t.f.h. $f(x)$

1/ $F(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy \quad (\Rightarrow f(x) = F'(x))$

2/

$$P(X \in C) = \int_C f(y) dy \quad \text{där } C \subset \mathbb{R},$$

B: 1/ $F(x) = P(X \leq x) = P(-\infty < X \leq x)$

$$= \left\{ \text{def med } a = -\infty \right\} = \int_{-\infty}^x f(y) dy$$

2/ svårt

□

Anm:

1/ $P(X=x) = P(x \leq X \leq x) = \int_x^x f(y) dy = 0$

"integral över en punkt".

2/

$$P(X \leq x) = P\{X \leq x\} = \{X < x\} \cup \{X = x\}$$

$$= P(X < x) + P(X = x) = P(X < x).$$

Strikt ($<$) eller icke-strikt ($\leq$)

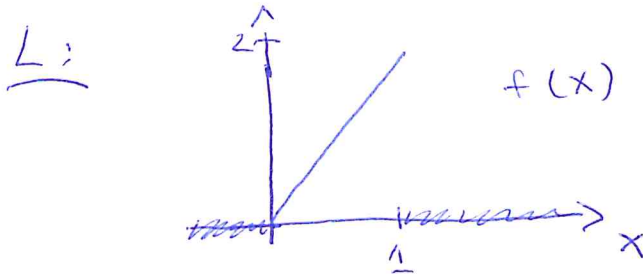
olikhet spelar ingen roll om X

är kont!

Tal: Låt X ha t.f.h.n

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{om } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

Beräkna $P\left(\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{2}{3}\right)$.



$$\begin{aligned} \text{Vi har att } P\left(\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{2}{3}\right) &= \int_{1/3}^{2/3} f(x) dx \\ &= \int_{1/3}^{2/3} 2x dx = \left[x^2 \right]_{1/3}^{2/3} = \frac{4}{9} - \frac{1}{9} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Def: Om X har t.f.h.n $f(x)$ så

definieras väntevärdet ($E[X]$) av

X genom att

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$$

Om $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ så def.

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx.$$

Anm: X kont. ger integral

X diskr. ger summa.

Tal (forts): Med X som ovan, beräkna $E[X]$.

$$\begin{aligned} \underline{L:} \quad E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_{-\infty}^0 x \underbrace{f(x)}_{=0} dx + \int_0^1 x \underbrace{f(x)}_{=2x} dx \\ &+ \int_1^{\infty} x \underbrace{f(x)}_{=0} dx = \int_0^1 x \cdot 2x dx = 2 \int_0^1 x^2 dx \\ &= 2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3} // \end{aligned}$$

Sats (räkne regler): Låt X, Y vara kont. sv. och $c \in \mathbb{R}$.

1/ $E[c] = c$

2/ $E[cX] = c E[X]$

3/ $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$.

1: 1/ $E[c] = \int_{-\infty}^{\infty} c f(x) dx = c \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = c \cdot 1 = c$

2/ $E[cX] = \int_{-\infty}^{\infty} c x f(x) dx = c \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = c E[X]$

3/ vi väntar till kap. 5 $\square$

Lom ihåg:

$$\text{Var}(X) = E[(X - E[X])^2]$$

Sats (Väntevärdesregler för Var): Låt X, Y vara två konst. s.v.

- 1/ $\text{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 f(x) dx$ (där $\mu_X = E[X]$)
- 2/ $\text{Var}(X) = E[X^2] - E[X]^2$
- 3/ $\text{Var}(cX) = c^2 \text{Var}(X)$
- 4/ $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$ om X, Y oberoende

B: 1/ $\text{Var}(X) = E[(X - \mu_X)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 f(x) dx$
 $\uparrow$
 def $E[g(X)]$

2/ + 3/ som när X diskret

4/ kap 5 B

Standardfördelningar

Def: En s.v. X med t.f.h.n

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{för } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

sägs vara likformigt fördelad på intervallet $[a, b]$. Vi skriver $X \sim U[a, b]$.

Funktioner av s.v.

Om $\underline{X}$ är en s.v. och $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kan vi def en ny s.v. $\underline{Y}$ via $\underline{Y} = g(\underline{X})$.

Om $\underline{X}$ har änd fördelning (sif, t+kn) vilken fördelning har då $\underline{Y}$?

Då $\underline{X}$ har t+kn $f_{\underline{X}}(s)$ har $\underline{Y}$ t+kn

$$f_{\underline{Y}}(s) = g(f_{\underline{X}}(s))$$

Nej!!!

i/ $g < 0 \Rightarrow$ kan bli neg.

$$ii) \int_{-\infty}^{\infty} g(f_{\underline{X}}(s)) ds \neq 1$$

I stället går vi via t+kn:

$$F_{\underline{Y}}(t) = P(\underline{Y} \leq t) = P(g(\underline{X}) \leq t) = P(\underline{X} \leq g^{-1}(t))$$

$$= F_{\underline{X}}(g^{-1}(t)). \quad \text{Vi får sedan att}$$

$$f_{\underline{Y}}(t) = F'_{\underline{Y}}(t),$$

Tal: Låt $X \sim U[-1,1]$, vilken tthn har X^2 ?

1: Vi har $X^2 \geq 0 \Rightarrow f_{X^2}(t) = 0 \quad t \leq 0.$

TMA 321

F6 (3)

För $0 \leq t \leq 1$ har vi att

$$\begin{aligned} F_{X^2}(t) &= P(X^2 \leq t) = P(-\sqrt{t} \leq X \leq \sqrt{t}) \\ &= \int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}} f_X(s) ds = \int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}} \frac{1}{2} ds = \sqrt{t} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f_{X^2}(t) = F'_{X^2}(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} \quad \text{för } 0 \leq t \leq 1.$$

Slutligen har vi att om $t > 1 \Rightarrow F_{X^2}(t) = 1$

$$\Rightarrow f_{X^2}(t) = 0. \quad \text{Dvs} \quad f_{X^2}(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} \quad 0 \leq t \leq 1,$$

Indikatorfunktion

$I_A(x)$, $I(x \in A)$ och $\chi_A(x)$ etc är olika skrivsätt för indikatorfunktioner

Här är (oftast) $A \subset \mathbb{R}^n$ och $x \in \mathbb{R}^n$.

Vi definierar

$$I(x \in A) = \begin{cases} 1 & \text{om } x \in A \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

Vi ser att

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\underline{X} \in A) &= \int_A f_{\underline{X}}(x) dx = \int I(x \in A) f_{\underline{X}}(x) dx \\ &= \mathbb{E}[I(\underline{X} \in A)]. \end{aligned}$$

Olikheter

Sats: För alla s.v. X och $a > 0$ gäller att

$$P(|X| \geq a) \leq \frac{E[|X|]}{a} \quad \text{Markov's olikhet}$$

B: Vi har att (med X kont.)

$$\begin{aligned} E[|X|] &\geq E[I(|X| \geq a)|X|] = \int_{-\infty}^{\infty} |x| I(|x| \geq a) f_X(x) dx \\ &\geq \int_{-\infty}^{\infty} a I(|x| \geq a) f_X(x) dx = a \int_a^{\infty} f_X(x) dx + a \int_{-\infty}^{-a} f_X(x) dx \\ &= a(P(X > a) + P(X < -a)) = a P(|X| > a). \end{aligned}$$

Om X är diskret är beviset analogt. $\square$

Sats: Låt X vara en s.v. med $\text{Var}(X) < \infty$.

Vi har att för alla $a > 0$,

$$P(|X - E[X]| \geq a) \leq \frac{\text{Var}(X)}{a^2}. \quad \text{Chebyshev's olikhet}$$

B: Vi har att

$$\begin{aligned} P(|X - E[X]| \geq a) &= P((X - E[X])^2 \geq a^2) \\ &\leq \frac{E[(X - E[X])^2]}{a^2} = \frac{\text{Var}(X)}{a^2}. \quad \square \end{aligned}$$

↑
Markov

Tal: Låt $X \sim \text{Bin}(n, \frac{1}{4})$. Hitta övre begränsningar till $P(X \geq \frac{n}{2})$ mha

a) Markov

b) Chebyshev

L: a)
$$P(X \geq \frac{n}{2}) \leq \frac{E[X]}{n/2} = \frac{n/4}{n/2} = \frac{1}{2}$$

b)

$$P(X \geq \frac{n}{2}) = P(X - \frac{n}{4} \geq \frac{n}{4}) \leq P(|X - \frac{n}{4}| \geq \frac{n}{4})$$

$$\leq \frac{\text{Var}(X)}{n^2/16} = \frac{n \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}}{n^2/16} = \frac{3}{n}$$

Ann: $\frac{3}{n} \ll \frac{1}{2}$ om n stort, men i själva verket kan vi göra mkt bättre.
