

Kom ihåg:

$$\mathbb{E}[h(X)] = \sum_x h(x) \mathbb{P}(X=x)$$

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$$

Sats (räkner regler för $\text{Var}(X)$):Låt X vara en (diskret) s.v. Vi har att

$$i) \quad \text{Var}(X) = \sum_x (x - \mathbb{E}[X])^2 \mathbb{P}(X=x)$$

$$ii) \quad \text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$

$$iii) \quad \text{Var}(X) = 0 \quad \text{om} \quad \mathbb{P}(X=c)=1 \quad \text{för något } c \in \mathbb{R},$$

$$iv) \quad \text{Var}(cX) = c^2 \text{Var}(X) \quad \forall c \in \mathbb{R},$$

v) Om X, Y är oberoende diskreta s.v.

$$\text{Var}(X+Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y).$$

B:

i) Enligt ovan har vi att

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[(X - \underbrace{\mathbb{E}[X]}_{=\mu_X})^2] = \mathbb{E}[(X - \mu_X)^2] \\ &= \sum_x h(x) \mathbb{P}(X=x) = \sum_x (x - \mu_X)^2 \mathbb{P}(X=x) \end{aligned}$$

ii) Vi har att

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= \mathbb{E}[(X - \mu_X)^2] = \mathbb{E}[X^2 + \mu_X^2 - 2\mu_X X] \\ &= \mathbb{E}[X^2] + \mathbb{E}[\mu_X^2] + \mathbb{E}[-2\mu_X X] \end{aligned}$$

$$= E[X^2] + \mu_X^2 - 2\mu_X E[X]$$

$$= E[X^2] + \mu_X^2 - 2\mu_X^2 = E[X^2] - \mu_X^2$$

där vi använt räkneregler för väntevärde,

iii) Om $P(X=c)=1 \Rightarrow (X-\mu_X)^2 = (c-c)^2 = 0$

$$\Rightarrow \text{Var}(X) = E[(X-\mu_X)^2] = E[0] = 0$$

iv) $\text{Var}(cX) = E[(cX - E[cX])^2]$

$$= E[(cX - cE[X])^2] = E[c^2(X - E[X])^2]$$

$$= c^2 E[(X - E[X])^2] = c^2 \text{Var}(X)$$

v) Tar vi senare (kap. 5) $\square$

Fler fördelningar

Tal: Emilia skjuter luftgevär mot en liten tavla. Varje skott träffar tavlan oberoende och med sannolikhet p . Låt $X = \#$ försök som Emilia behöver t.o.m. första träffen. Hitta t.f.n för X .

2: Vi skall beräkna $P(X=k)$
 för $k=1, 2, \dots$ ("ingen övre gräns").
 För att händelsen $\{X=k\}$ skall
 inträffa måste Emilia ha missat
 $(k-1)$ ggr och sedan träffat försök
 nr k . Dvs

$$\begin{aligned}
 P(X=k) &= P(m, m, m, \dots, m, t) \\
 &= \underbrace{P(m) \cdot P(m) \cdots P(m)}_{\substack{\uparrow \\ \text{öber.} \\ k-1 \text{ ggr}}} \cdot P(t) \\
 &= (1-p)^{k-1} p //
 \end{aligned}$$

Def: X är geometriskt fördelad
 med parameter $0 < p < 1$ ($X \sim \text{Geom}(p)$)

om

$$P(X=k) = (1-p)^{k-1} p \quad \text{för } k=1, 2, \dots$$

Def: S.v. X är Poisson-fördelad med parameter $\lambda > 0$ ($X \sim \text{Poi}(\lambda)$) om

$$P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad \text{för } k=0, 1, 2, \dots$$

Anm: γ $e^\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k)$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^\lambda = 1.$$

2/ Poisson-fördelningen uppkommer som ett gränsvärde av binomial-fördelningen.

3/ $\text{Poi}(\lambda)$ är vanligt förekommand.

T.ex. har # sönderfall _{tidsenhet} i ett stycke radioaktivt material denna fördelning.

Poissonprocessen (kort och informellt):

Poissonprocessen uppkommer när vi observerar händelser (sönderfall, jordbävningar, vita blodceller) i en mängd (tidsintervall, blodsdroppe).

Om en Poissonprocess har intensitet λ (händelser / tids eller rymdenhet)

så är antalet händelser i mängden
 $S \subset \mathbb{R}^d$ poisson-fördelat med parameter
 $\lambda | S$.

Anm: Boken använder $Poi(k)$ och
 intensitet λ . Alla andra använder
 $Poi(\lambda)$ ("men intensitetsbeteckningen
 varierar").

Tal1: Ett radioaktivt material har intensit.
 1,73 sönderfall/sekund. Vilken fördelning
 har antalet sönderfall under 35 sekunder
L:

$$Poi(1,73 \cdot 35) = Poi(60,55) //$$

Tal2: Antalet vita blodkroppar är i
 genomsnitt 637/ml blod. Vilken fördelning
 har # vita blodkroppar i 1 cl blod?
L:

$$1 \text{ cl} = 10 \text{ ml.}$$

$$Poi(637 \cdot 10) = Poi(6370) //$$

Anm: Varför är Poisson lämpligt
 här?

2/ I tal 2, varför står det i genomsnitt
 (och inte intensitet)?

Sats:

Om $\underline{X}_n \sim \text{Bin}(n, p_n)$ där $np_n \rightarrow \lambda$ $n \rightarrow \infty$ F5 (2)så gäller att $P(\underline{X}_n = k) \rightarrow P(X = k)$ där $X \sim \text{Poi}(\lambda)$.B:Fixera k .

$$P(\underline{X}_n = k) = \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p_n^k (1-p_n)^{n-k}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} n^k (np_n)^k (1-p_n)^{n-k} \quad (*)$$

$$i) (np_n)^k \rightarrow \lambda^k$$

$$ii) (1-p_n)^{n-k} \rightarrow e^{-\lambda} \quad \Gamma (1+a_n)^{b_n} \rightarrow e^c \text{ om } a_n b_n \rightarrow c \text{ och } a_n \rightarrow 0$$

$$iii) \frac{n!}{n^k (n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n \cdot n \dots n} \rightarrow 1$$

$$\Rightarrow (*) \rightarrow \frac{1}{k!} \lambda^k e^{-\lambda} \quad \square$$

Kontinuerliga s.v.

"Def": En s.v. X som kan anta alla värden i ett eller flera intervall är en kontinuerlig s.v. om $P(X=x)=0$ för alla $x \in \mathbb{R}$.

Ann: Om X var diskret så kallades

$f(x) = P(X=x)$ för täthetsfunktionen.

Def: Låt X vara en kont. s.v. En funktion $f(x)$ sådan att

$$1) f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$2) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

$$3) P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx \quad \forall a < b \in \mathbb{R}$$

kallas för en tfkn för X .

Fördelningstfn def. som för en diskret s.v.:

Def: Låt X vara en kont. s.v.

$$F(x) := P(X \leq x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

kallas för tthn för $\underline{X}$.

Sats: Låt $\underline{X}$ vara kont. s. med tthn $f(x)$

$$1/ \quad F(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy \quad (\Rightarrow f(x) = F'(x))$$

2/

$$P(\underline{X} \in C) = \int_C f(y) dy \quad \text{där } C \subset \mathbb{R},$$

B: 1/ $F(x) = P(\underline{X} \leq x) = P(-\infty < \underline{X} \leq x)$

$$= \left\{ \text{def med } a = -\infty \right\} = \int_{-\infty}^x f(y) dy$$

2/ svårt $\square$ —

Anm: 1/ $P(\underline{X} = x) = P(x \leq \underline{X} \leq x) = \int_x^x f(y) dy = 0$

"integral över en punkt".

2/

$$P(\underline{X} \leq x) = P(\underline{X} \leq x) = P(\underline{X} < x) \cup \{\underline{X} = x\}$$

$$= P(\underline{X} < x) + P(\underline{X} = x) = P(\underline{X} < x).$$

Strikt ($<$) eller icke-strikt ($\leq$)
olikhet spelar ingen roll om $\underline{X}$
är kont!