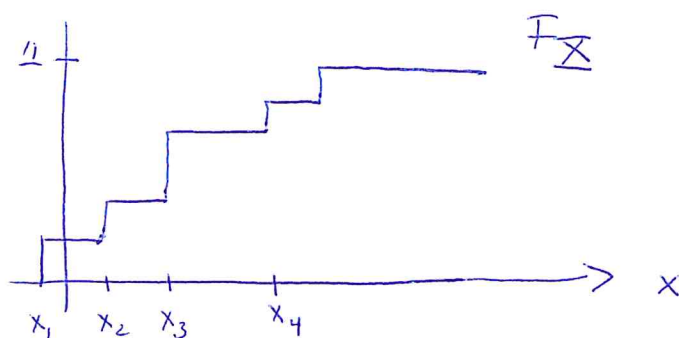


Kom ihåg: X diskret s.v., $f_X(x)$ t.f.h.n.
och $F_X(x) := \mathbb{P}(X \leq x)$ är en t.f.h.n.

OBS: $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{y: y \leq x} \mathbb{P}(X=y) = \sum_{y: y \leq x} f_X(y)$

så känedom om f_X ger F_X .

P.S.S.



$$\mathbb{P}(X=x_3) = F_X\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right) - F_X\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right)$$

Standardfördelningar

Tal:

Antag att vi g  r n oberoende försök där varje försök lyckas m.s. p . Låt $X = \#$ lyckade försök. Bestäm t.f.h.n för X .

L: Vi skall bestämma $\mathbb{P}(X=k) \forall k$.

Vi har att

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X=k) &= (\# \text{ f  rs  kssekvenser med exakt } k \text{ lyckade}) \\ &\quad \times (\text{sann. för en fix sek, med " " "}) \\ &= I \times II, \end{aligned}$$

Försök nr: 1 2 3 4 ... n-1 n

Status (l/n): l m m l ... l m

Sann: p $(1-p)$ $(1-p)$ p ... p $(1-p)$

se kvensen har sann = $p^{\# \text{lyckade}} (1-p)^{\# \text{missl.}}$

Vi får att $\Pi = p^k (1-p)^{n-k}$,

$I = \# \text{sätt välja } k \text{ ur } n = \binom{n}{k}$

$\Rightarrow P(X=k) = I \cdot \Pi = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ för $k=0,1,\dots,n$

Def: En s.v. X är binomialfördelad med parametrar $n \in \mathbb{N}^+$ och $0 < p < 1$

$(X \sim \text{Bin}(n, p))$ om

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad k=0,1,\dots,n.$$

Ann: 1/ Binomialfördelningen uppkommer

när n oberoende försök genomförs.

Dessa försök kan antingen lyckas eller misslyckas.

2/ Fördelningen av en s.v. X bestäms av dess täthetsfhn och/eller ffn.

3/ Fallet $n=1$ kallas ibland för Bernoulli-fördelningen ($X \sim \text{Ber}(p)$).

Def: Väntevärdet av en diskret s.v. X betecknas $E[X]$ och ges av

$$E[X] = \sum_{\text{alla } x} x P(X=x).$$

Om $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definierar vi

$$E[h(X)] = \sum_{\text{alla } x} h(x) P(X=x) = \sum_{\text{alla } x} h(x) f_X(x).$$

Anm: 1/

$\sum_{\text{alla } x}$ betyder $\sum$ alla värden på x som X kan anta

skrivs ibland $\sum_x$.

2/ $E[h(X)]$ är bara def. för de h ner

h och s.v. X s.a. $\sum_x |h(x)| f_X(x) < \infty$.

" Andra konventioner existerar, dvs

$E[X] = \pm \infty$ tillåts",

Tal: Låt X = resultatet av ett tärningskast. Beräkna $E[X]$.

L: Vi har att $X \in \{1, 2, \dots, 6\}$ och att

$P(X=k) = \frac{1}{6}$ för $k \in \{1, 2, \dots, 6\}$. Vi får att

$$E[X] = \sum_{k=1}^6 k P(X=k) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \dots + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3.5 //$$

Sats (räkne regler för E):

Låt X, Y vara (diskreta) s.v. och

låt $c \in \mathbb{R}$. Vi har att

$$i) E[c] = c$$

$$ii) E[cX] = c E[X]$$

$$iii) E[X+Y] = E[X] + E[Y]$$

B: i) $E[c] = \{X \text{ är en s.v.} = c \text{ m.s. 1}\}$

$$= \sum_x x f_X(x) = c \cdot f_X(c) = c \cdot 1 = c$$

ii) Låt $h(x) = cx$. Vi har att

$$E[cX] = E[h(X)] = \sum_x h(x) P(X=x)$$

$$= \sum_x cx P(X=x) = c \sum_x x P(X=x)$$

$$= c E[X]$$

iii) Vi väntar till kap 5. $\square$

Anm: Om $h, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ och $a, b \in \mathbb{R}$

så får vi att

$$E[ah(X) + bg(X)] = a E[h(X)] + b E[g(X)]$$

Tal: Låt $\underline{X}_1, \underline{X}_2, \dots, \underline{X}_{100}$ vara resultaten av 100 tärningskast.

Beräkna $E\left[\sum_{k=1}^{100} \underline{X}_k\right]$.

L: Metod 1: Låt $Z = \underline{X}_1 + \underline{X}_2 + \dots + \underline{X}_{100}$.

Hitta $P(Z=100), P(Z=101), \dots, P(Z=600)$ och beräkna sedan

$$E[Z] = \sum_{k=100}^{600} k P(Z=k)$$

Metod 2: Enl. satsen ovan har vi

$$\begin{aligned} \text{att } E[Z] &= E\left[\sum_{k=1}^{100} \underline{X}_k\right] = E\left[\underline{X}_1 + \sum_{k=2}^{100} \underline{X}_k\right] \\ &= E[\underline{X}_1] + E\left[\sum_{k=2}^{100} \underline{X}_k\right] = \dots = \sum_{k=1}^{100} E[\underline{X}_k] \end{aligned}$$

$$= 100 E[\underline{X}_1] = 100 \cdot 3.5 = 350 //$$

Tal: Låt $\underline{X} \sim \text{Bin}(n, p)$. Beräkna $E[\underline{X}]$.

L: Metod 1:

$$E[\underline{X}] = \sum_{k=0}^n k P(\underline{X}=k) = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

= ... räkna ... = ?

Metod 2: Låt $\underline{X}_k = \begin{cases} 1 & \text{om exper. } k \text{ lyckat} \\ 0 & \text{annars,} \end{cases}$

$$\Rightarrow \underline{X} = \underline{X}_1 + \dots + \underline{X}_n \sim \text{Bin}(n, p)$$

$$\Rightarrow E[\underline{X}] = E\left[\sum_{k=1}^n \underline{X}_k\right] = \sum_{k=1}^n E[\underline{X}_k] = \sum_{k=1}^n p = np //$$

Def: Variansen $\text{Var}(X)$ av en (diskret) s.v. X definieras av

$$\text{Var}(X) = E[(X - E[X])^2].$$

Standardavvikelsen av X definieras

○ som $\sqrt{\text{Var}(X)}$.

○ Anm: i) $\text{Var}(X)$ betecknas ofta σ^2 eller σ_X^2
 ii) $\sqrt{\text{Var}(X)}$ " " σ " σ_X
 iii) $E[X]$ " " μ " μ_X

Sats (räkne regler för $\text{Var}(X)$):

Låt X vara en (diskret) s.v. Vi har att

○ i)
$$\text{Var}(X) = \sum_x (x - E[X])^2 P(X=x)$$

○ ii)
$$\text{Var}(X) = E[X^2] - E[X]^2$$

iii)
$$\text{Var}(X) = 0 \quad \text{om} \quad P(X=c)=1 \text{ för något } c \in \mathbb{R}.$$

iv)
$$\text{Var}(cX) = c^2 \text{Var}(X) \quad \forall c \in \mathbb{R}.$$

v) Om X, Y är oberoende diskreta s.v.

$$\text{Var}(X+Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y),$$

Ann: $v)$ är pre-matur. Vi återkommer till denna längre fram.

Intuitivt innebär oberoende att kännedom om $\underline{X}$ inte ger ngn info om $\underline{Y}$ och vice versa. Tänk, $\underline{X}, \underline{Y}$

resultaten av två olika tärningskast.