

MVE302/MVE395/TMA321
Exempeldugga med lösningar

1. Låt X vara en kontinuerlig slumpvariabel, likformigt fördelad på intervallet $[1, 2]$. Givet $X = x$, låt Y vara likformigt fördelad på $[-x, x]$. Ange $\mathbb{E}[Y]$ och $\text{Var}(Y)$.

Lösning. Från den givna informationen har vi

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 1 < x < 2, \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$

och

$$f_{Y|X}(y | x) = \begin{cases} \frac{1}{2x}, & -x < y < x, \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$

Det följer från lagen om total sannolikhet att

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_{Y|X}(y | x) dx.$$

Om $|y| > 2$ så är integralen noll. För $|y| < 1$ gäller att

$$f_Y(y) = \int_1^2 1 \cdot \frac{1}{2x} dx = \frac{1}{2} \ln 2.$$

För $1 < |y| < 2$ gäller att

$$f_Y(y) = \int_{|y|}^2 1 \cdot \frac{1}{2x} dx = \frac{1}{2} (\ln 2 - \ln |y|).$$

Alltså är

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} \ln 2, & |y| < 1, \\ \frac{1}{2} (\ln 2 - \ln |y|), & 1 \leq |y| < 2, \\ 0, & |y| \geq 2. \end{cases}$$

Vi noterar att f_Y är jämn, alltså $f_Y(y) = f_Y(-y)$ för alla y , så

$$\mathbb{E}[Y] = \int_{-2}^2 y f_Y(y) dy = 0,$$

eftersom funktionen $y f_Y(y)$ är udda.

Vi har (igen eftersom f_Y är jämn)

$$\text{Var}(Y) = \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2 = \mathbb{E}[Y^2] = \int_{-2}^2 y^2 f_Y(y) dy = 2 \int_0^2 y^2 f_Y(y) dy.$$

Vi får

$$\begin{aligned}\text{Var}(Y) &= \int_0^1 y^2 \ln(2) dy + \int_1^2 y^2 (\ln 2 - \ln y) dy \\ &= \int_0^2 y^2 \ln(2) dy - \int_1^2 y^2 \ln(y) dy \\ &= \frac{8}{3} \ln 2 - \int_1^2 y^2 \ln(y) dy.\end{aligned}$$

För den sista integralen använder vi partiel integration (eller Wolfram Alpha eftersom det är tidspress och duggan bara kräver svar):

$$\begin{aligned}\int_1^2 y^2 \ln(y) dy &= \left[\frac{y^3}{3} \ln y \right]_{y=1}^2 - \int_1^2 \frac{y^2}{3} dy \\ &= \left(\frac{8}{3} \ln 2 - 0 \right) - \left(\frac{8}{9} - \frac{1}{9} \right).\end{aligned}$$

Då är

$$\text{Var}(Y) = \frac{8}{3} \ln 2 - \frac{8}{3} \ln 2 + \left(\frac{8}{9} - \frac{1}{9} \right) = \frac{7}{9}.$$

2. En 6-sidig och en 12-sidig tärning (numererade 1–6 respektive 1–12) kastas samtidigt. Vad är sannolikheten att den 6-sidiga tärningen visar ett högre värde än den 12-sidiga?

Lösning. Låt X vara värdet hos den 6-sidiga tärningen, och Y värdet hos den 12-sidiga. Dessa antas vara oberoende, och likformigt fördelade på $A = \{1, 2, \dots, 6\}$ respektive $B = \{1, 2, \dots, 12\}$. Låt $f(x, y)$ vara den simultana fördelningsfunktionen; då är

$$f(x, y) = \frac{1}{6 \times 12} = \frac{1}{72}, \quad x \in A, \quad y \in B.$$

Den sökta sannolikheten är

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > Y) &= \sum_{x=2}^6 \sum_{y=1}^{x-1} f(x, y) \\ &= \sum_{x=2}^6 \sum_{y=1}^{x-1} \frac{1}{72} \\ &= \sum_{x=2}^6 \frac{x-1}{72} \\ &= \frac{1+2+3+4+5}{72} \\ &= \frac{15}{72} \\ &= \frac{5}{24}.\end{aligned}$$

3. Två kontinuerliga slumpvariabler X, Y har simultanfördelning

$$f(x, y) = (3y^2 - 2xy) \ln x, \quad 1 \leq x \leq y \leq 2.$$

Hitta marginalfördelningen för x .

Lösning. För $x \in (1, 2)$ gäller att

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \int_x^2 (3y^2 - 2xy) \ln(x) dy \\ &= \ln(x) \int_x^2 (3y^2 - 2xy) dy \\ &= \ln(x) [y^3 - xy^2]_{y=x}^2 \\ &= (8 - 4x) \ln x. \end{aligned}$$

Kommentar. Den uppmärksamme inser att $f_X(x)$ inte är en täthetsfunktion, då dess integral inte är lika med 1. Således är inte heller $f(x, y)$ en simultan täthetsfunktion. Detta var ett misstag i konstruktionen.

4. I en urna ligger inledningsvis en svart kula och en vit kula. Följande process kallas ett drag:

1. Välj en kula från urnan likformigt (varje kula har samma sannolikhet att väljas).
2. Lägg tillbaka kulan tillsammans med en ny kula av samma färg.

Efter första draget innehåller urnan antingen 2 svarta kulor och 1 vit kula, eller 1 vit och 2 svarta.

Låt X vara antalet drag tills en vit kula dras upp från urnan. (Om en vit kula dras i det första draget är $X = 1$). Beräkna $\mathbb{P}(X = n)$ för alla positiva heltal n .

Lösning. Vi noterar att

$$\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(X > n - 1) - \mathbb{P}(X > n),$$

så det räcker att beräkna $g(n) = \mathbb{P}(X > n)$ för $n \geq 0$. Uppenbart är att $g(0) = 1$. För $n \geq 1$ gäller att

$$g(n) = \mathbb{P}(X > n) = \prod_{k=1}^n \frac{k}{k+1}.$$

Detta förklaras som följer: antag att de $k - 1$ första dragen resulterade i en svart kula. Inför det k :te draget ligger då 1 vit och k svarta kulor i urnan. Sannolikheten att välja en svart kula är då $k/(k+1)$. Vi har

$$g(n) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

Det följer att

$$\mathbb{P}(X = n) = g(n-1) - g(n) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}.$$

5. Låt $X \sim N(4, 9)$ och $Y \sim N(-2, 7)$ vara oberoende. Beräkna $\mathbb{P}(X < Y)$.

Lösning. Man sparar mycket jobb genom att notera att $\mathbb{P}(X < Y) = \mathbb{P}(X - Y < 0)$, och eftersom X och Y är oberoende normalfördelade är

$$X - Y \sim N(4 - (-2), 9 + 7) = N(6, 16).$$

Då gäller att

$$\mathbb{P}(X - Y < 0) = \Phi\left(\frac{0 - 6}{\sqrt{16}}\right) = \Phi\left(\frac{-3}{2}\right) \approx 0.067.$$

6. Till en postombud kommer två typer av kunder:

- Postkunder anländer som en Poissonprocess med intensitet 20 kunder/timme.
- Spelkunder anländer som en Poissonprocess med intensitet 10 kunder/timme.

De två Poissonprocesserna är oberoende. Vad är sannolikheten att den första kunden är en spelkund?

Lösning. Låt X vara tidpunkten för den första postkunden, och Y tidpunkten för den första spelkunden. Då är $X \sim \exp(20)$ och $Y \sim \exp(10)$, och de två är oberoende, så

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > Y) &= \iint_{x>y} f_X(x)f_Y(y)dx dy \\ &= \int_0^\infty f_Y(y) \left(\int_y^\infty f_X(x)dx \right) dy \\ &= \int_0^\infty 10e^{-10y} \left(\int_y^\infty 20e^{-20x}dx \right) dy \\ &= \int_0^\infty 10e^{-10y} (e^{-20y}) dy \\ &= 10 \int_0^\infty e^{-30y} dy \\ &= \frac{10}{30} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Detta stämmer väl överens med vår intuition kring Poissonprocesser.