Matematiska Vetenskaper 4 maj 2023
Chalmers Tekniska Högskola Examinator: Tony Johansson

MVE302/MVE395/TMA321
Dugga

1. Låt X vara en kontinuerlig slumpvariabel med täthetsfunktion

$$f(x) = cx^2(1-x), \quad 0 \le x \le 1,$$

där $c > 0$ är en konstant. Bestäm konstanten c, samt $\mathbb{E}[X]$.

Lösning. För att f ska vara en täthetsfunktion måste gälla att

$$\begin{aligned} 1 = \int_0^1 f(x)dx &= \int_0^1 cx^2(1-x)dx \\ &= c\left(\int_0^1 x^2 - x^3 dx\right) \\ &= c\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{c}{12}. \end{aligned}$$

Alltså är $c = 12$, och $f(x) = 12x^2(1-x)$. Det följer att

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] = \int_0^1 xf(x)dx &= 12\int_0^1 x^3(1-x)dx \\ &= 12\left(\int_0^1 x^3 - x^4 dx\right) \\ &= 12\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) \\ &= \frac{12}{20} = \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

Alternativ lösning. Det går precis lika bra att inse att X följer en fördelning som kallas Beta–fördelningen (som ni kan hitta till exempel i boken Beta), $X \sim \text{Beta}(3, 2)$. Då är

$$c = \frac{\Gamma(3+2)}{\Gamma(3)\Gamma(2)} = \frac{4!}{2!1!} = 12,$$

och enligt tabell är $\mathbb{E}[X] = 3/(3+2) = 3/5$.

2. Låt X_1, X_2, X_3 vara oberoende slumpvariabler, likformigt fördelade på $[0, 1]$. Låt $X = \min\{X_1, X_2, X_3\}$. Vad är $\mathbb{E}[X]$?

Lösning. För $0 < x < 1$ är

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X > x) &= \mathbb{P}(X_1 > x \ \cap \ X_2 > x \ \cap \ X_3 > x) \\ &= \mathbb{P}(X_1 > x)\mathbb{P}(X_2 > x)\mathbb{P}(X_3 > x) \\ &= (1-x)^3. \end{aligned}$$

Då är $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = 1 - (1-x)^3$, och täthetsfunktionen för X är derivatan;

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) = 3(1-x)^2.$$

Väntevärdet är då

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \int_0^1 x \cdot 3(1-x)^2 dx \\
&= 3 \int_0^1 x - 2x^2 + x^3 dx \\
&= 3\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right) \\
&= \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

3. Låt $p \in (0,1)$, och låt X, Y vara oberoende slumpvariabler, båda med fördelnigen Geom(p):

$$f_X(k) = f_Y(k) = p(1-p)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

(a) Beräkna $\mathbb{P}(X = 3 \mid X + Y = 6)$.

(b) Bestäm den betingade sannolikhetsfunktionen

$$f_{X|X+Y}(x \mid u), \quad 1 \leq x < u.$$

Alltså; givet $X + Y$, vad har X för fördelning?

Lösning (b). (Del **(a)** är samma med $x = 3, u = 6$). Bayes formel ger

$$f_{X|X+Y}(x \mid u) = \frac{\mathbb{P}(X = x \ \cap \ X + Y = u)}{\mathbb{P}(X + Y = u)}.$$

För täljaren gäller att

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = x \ \cap \ X + Y = u) &= \mathbb{P}(X = x \ \cap \ Y = u - x) \\
\text{(oberoende)} &= \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = u - x) \\
&= p(1-p)^{x-1} p(1-p)^{u-x-1} \\
&= p^2(1-p)^{u-2}.
\end{aligned}$$

I nämnaren ger lagen om total sannolikhet att

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X + Y = u) &= \sum_{x=1}^{u-1} \mathbb{P}(X + Y = u \mid X = x)\mathbb{P}(X = x) \\
&= \sum_{x=1}^{u-1} p(1-p)^{u-x-1} p(1-p)^{x-1} \\
&= (u-1)p^2(1-p)^{u-2}.
\end{aligned}$$

Vi får då, för $1 \leq x < u$, att

$$f_{X|X+Y}(x \mid u) = \frac{p^2(1-p)^{u-2}}{(u-1)p^2(1-p)^{u-2}} = \frac{1}{u-1}.$$

Slutsatsen är: givet $X+Y$, så är X likformig på $\{1, 2, \ldots, X+Y-1\}$.