

MVE302, MVE395, TMA321
Tentamen

Detta är en sammanslagning av tentamen för de tre kurserna.
Notera att uppgifter märkta **MVE302** ej ingår på tentamen
för MVE395 och TMA321.

TMA321 & MVE395: 12–17p ger trea, 18–23p ger fyra, 24–30p ger femma.

MVE302: 16–23p ger trea, 24–31p ger fyra, 33–40p ger femma.

Tillåtna hjälpmedel:

- valfri miniräknare,
- Mathematics Handbook (Beta),
- 2 blad (totalt 4 sidor) handskrivna anteckningar (utskrivna anteckningar från skrivplatta godkänns),
- tabeller bifogade till tesen.

1. (6p) Två kontinuerliga stokastiska variabler X, Y har simultanfördelning

$$f(x, y) = \frac{1}{x} e^{-x}, \quad 0 < y < x.$$

Bestäm korrelationskoefficienten

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X) \text{Var}(Y)}}.$$

2. (5p) En vanlig sexsidig tärning kastas n gånger, och S_n betecknar summan av utfallen av de n kasten. Välj konstanterna a, b så att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(an - b\sqrt{n} \leq S_n \leq an + b\sqrt{n}) = 0.95.$$

3. (5p) Följande data kommer från en normalfördelning med okänt väntevärde μ och varians σ^2 :

1.01, 1.22, 1.31, 1.66, 1.87, 2.15, 2.75, 3.21.

Ange ett 95% konfidensintervall för μ , och ta ställning till $H_0 : \mu = 1$ mot $H_A : \mu \neq 1$ på signifikansnivå 0.05.

4. Låt $\theta > 0$. För en populationsvariabel $X \sim \mathcal{U}[0, \theta]$ vill vi testa $H_0 : \theta = 3$ mot $H_A : \theta > 3$, baserat på teststatistikan

$$M = \max\{X_1, \dots, X_n\}.$$

- (a) (4p) Utforma ett sådant test på signifikansnivå $\alpha = 0.05$.
 (b) (MVE302, 3p) Bestäm styrkan $\beta(\theta)$ för testet med $n = 4$, som en funktion av $\theta > 3$.
5. Johanna är ett stort fan av Eurovision Song Contest, och undersöker sambandet mellan juryns poäng (X) och publikens poäng (Y) till ett bidrag. Baserat på data (x_k, y_k) från $n = 51$ bidrag från 2021 och 2022 beräknar hon följande summor:

$$\sum_{k=1}^n x_k = \sum_{k=1}^n y_k = 4582,$$

$$S_{xx} = \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2 = 327000,$$

$$S_{xy} = \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y}) = 215000,$$

$$S_{yy} = \sum_{k=1}^n (y_k - \bar{y})^2 = 493000.$$

- (a) (1p) Skatta koefficienterna a, b, σ^2 i en linjär regressionsmodell

$$Y = a + bX + \varepsilon, \quad \varepsilon \sim N(0, \sigma^2).$$

- (b) (3p) Sveriges bidrag 2023 fick 340 poäng från juryn, och Johanna vill känna sig säker på att det räcker för vinst innan publikens poäng tillkännages. Hon beräknar därför ett nedre begränsat 90% prediktionsintervall för publikens poäng för samma bidrag. Ange detta.
6. Betrakta följande process, där $n \geq 2$ är ett heltal. Välj X_1 likformigt från $\{1, \dots, n\}$. Givet X_1 , välj X_2 likformigt från $\{1, \dots, X_1\}$. Generellt; för alla $k \geq 2$ väljs X_k likformigt från $\{1, \dots, X_{k-1}\}$. Låt

$$T_n = \min\{k : X_k = 1\}.$$

- (a) (1p) Hitta sannolikhetsfunktionen för T_2 .
 (b) (3p) Hitta sannolikhetsfunktionen för T_3 .
 (c) (2p) Beräkna $\mathbb{E}[T_4]$.

7. (MVE302) För en populationsvariabel $X \sim \Gamma(2, \lambda)$ är vi intresserade av parametern λ . Vi väljer en Bayesiansk approach, och introducerar en slumpvariabel Λ och gör observationer $x_1, \dots, x_n$.

(a) (3p) Givet priorfördelning $\Gamma(\alpha, \beta)$ med $\alpha \in \mathbb{N}$ och $\beta \in \mathbb{R}_{>0}$, vad är posteriorfördelningen för Λ ?

(b) (2p) Skatta λ via ett posterior mean estimate $\hat{\lambda}_{\text{pme}}$.

(c) (2p) Visa att skattningen $\hat{\lambda}_{\text{pme}}$ är konsistent.

Tips. En stokastisk variabel $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$ med $\alpha \in \mathbb{N}$ har täthetsfunktion

$$f_X(x) = \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} e^{-\lambda x}, \quad x > 0.$$

Tabeller

Om det värde du söker saknas i en tabell, använd det närmast tillgängliga.

Fördelningsfunktionen $\Phi(z) = F_Z(z)$ för $Z \sim N(0, 1)$

z	0	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5	1.75	2	2.5	3
$\Phi(z)$	0.5	0.6	0.69	0.77	0.84	0.89	0.93	0.96	0.977	0.994	0.999

Kvantilfunktionen $F_{t_{df}}^{-1}(q)$ för t -fördelningen

	$q = 0.9$	$q = 0.95$	$q = 0.975$	$q = 0.99$
df = 1	3.08	6.31	12.71	31.82
df = 2	1.89	2.92	4.30	6.96
df = 3	1.64	2.35	3.18	4.54
df = 4	1.53	2.13	2.78	3.75
df = 5	1.48	2.02	2.57	3.36
df = 7	1.41	1.89	2.36	3.00
df = 10	1.37	1.81	2.23	2.76
df = 15	1.34	1.75	2.13	2.60
df = 20	1.33	1.72	2.09	2.53
df = 30	1.31	1.70	2.04	2.46
df = 50	1.30	1.68	2.01	2.40
df = 100	1.29	1.66	1.98	2.36
df = ∞	1.28	1.64	1.96	2.33

Kvantilfunktionen $F_{\chi_{df}^2}^{-1}(q)$ för χ^2 -fördelningen

	$q = 0.025$	$q = 0.05$	$q = 0.1$	$q = 0.9$	$q = 0.95$	$q = 0.975$
df = 1	0.001	0.004	.02	2.71	3.84	5.02
df = 2	0.05	0.10	0.21	4.61	5.99	7.38
df = 3	0.22	0.35	0.58	6.25	7.81	9.35
df = 4	0.48	0.71	1.06	7.78	9.49	11.1
df = 5	0.83	1.15	1.61	9.24	11.1	12.8
df = 7	1.69	2.17	2.83	12.02	14.1	16.0
df = 10	3.25	3.94	4.87	16.0	18.3	20.5
df = 15	6.26	7.26	8.55	22.3	25.0	27.5
df = 20	9.59	10.9	12.4	28.4	31.4	34.2