Matematiska Vetenskaper 2023–08–15 EM
Chalmers Tekniska Högskola Examinator: Tony Johansson (1069)

MVE302, MVE395, TMA321
Tentamen

Detta är en sammanslagning av tentamen för de tre kurserna.
Notera att uppgifter märkta **MVE302** ej ingår på tentamen
för MVE395 och TMA321.

TMA321 & MVE395: 12–17p ger trea, 18–23p ger fyra, 24–30p ger femma.

MVE302: 16–23p ger trea, 24–31p ger fyra, 33–40p ger femma.

Tillåtna hjälpmedel:

- valfri miniräknare,
- Mathematics Handbook (Beta),
- 2 blad (totalt 4 sidor) handskrivna anteckningar (utskrivna anteckningar från skrivplatta godkänns),
- tabeller bifogade till tesen.

---

1. (5p) Två kontinuerliga slumpvariabler X, Y har simultan täthetsfunktion

$$f(x,y) = c(x+y)e^{-x}, \quad 0 < y < x,$$

för någon constant $c > 0$.

(a) Bestäm konstanten c.

(b) Beräkna $\mathbb{E}[X]$.

(c) Beräkna $\mathbb{E}[Y]$.

(d) Beräkna $\text{Cov}(X, Y)$.

Tips. För heltal $k \geq 0$ gäller att $\int_0^\infty x^k e^{-x} dx = k!$.

2. (5p) En vanlig sexsidig tärning kastas n gånger, och S_n betecknar summan av de n kastens utfall. Hitta konstanter $\alpha, \beta > 0$ sådana att

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(S_n \leq 3.5n + \alpha n^\beta) = 0.999.$$

3. (5p) Följande data kommer från en normalfördelning med okänt väntevärde μ och okänd varians σ^2:

$$1.01,\ 1.22,\ 1.31,\ 1.66,\ 1.87,\ 2.15,\ 2.75,\ 3.21.$$

Ange ett 95% konfidensintervall för μ, och ta ställning till $H_0 : \mu = 1$ mot $H_A : \mu \neq 1$ på signifikansnivå 0.05.

4. (5p) Antag att $X \sim \Gamma(3, \theta)$, så att X har följande täthetsfunktion med parameter $\theta > 0$:

$$f_\theta(x) = \frac{\theta^3 x^2}{2} e^{-\theta x}, \quad x > 0.$$

Hitta en maximum likelihood–skattning av θ.

5. (4p) Låt $X_1, X_2, \ldots$ vara oberoende slumpvariabler med

$$\mathbb{P}(X_k = 1) = \mathbb{P}(X_k = -1) = \frac{1}{2}, \quad \text{för alla } k.$$

Definiera $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. För heltal $k \neq 0$ definieras

$$T_k = \min\{n \geq 1 : S_n = k\}.$$

Beräkna $\mathbb{P}(T_{-1} < T_2)$.

6. (6p) En kontinuerlig populationsvariabel X, likformigt fördelad på intervallet $[0, \theta]$ för något $\theta > 0$, studeras. Ett stickprov av storlek $n = 4$ tas, och vi noterar teststatistikan

$$\max\{x_1, x_2, x_3, x_4\} = 3.1.$$

Ange, baserat på detta, ett 95% konfidensintervall för θ på formen $[a, \infty)$.

7. **(MVE302, 3+3p)** Anta att vi känner till att en populationsvariabel X är normalfördelad med varians 10 och okänt väntevärde μ. Vi vill testa nollhypotesen $H_0 : \mu = 0$ mot alternativhypotesen $H_1 : \mu > 0$, med ett stickprov av storlek $n = 10$. Som teststatistika används stickprovsmedelvärdet $\overline{X}$. Vi kommer fram till att H_0 ska förkastas på signifikansnivå α om $\overline{X} > 1.75$.

(a) Vad är signifikansnivån α?

(b) För vilket värde på μ gäller att testets styrka är 99.9%?

8. **(MVE302, 4p)** Låt $X_1, X_2, \ldots$ vara oberoende likformiga slumpvariabler med väntevärde 0 och ändlig varians σ^2. Anta att varje X_i har en momentgenererande funktion $M_i(t)$ som är konvergent för alla $t \in \mathbb{R}$. Notera att variablerna inte nödvändigtvis har samma fördelning. Låt

$$Z_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} X_k$$

och visa att den momentgenererande funktionen för Z_n konvergerar punktvis till den momentgenererande funktionen för $N(0, 1)$.

Tabeller

Om det värde du söker saknas i en tabell, använd det närmast tillgängliga.

Fördelningsfunktionen $\Phi(z) = F_Z(z)$ för $Z \sim N(0,1)$

z	0	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5	1.75	2	2.5	3
$\Phi(z)$	0.5	0.6	0.69	0.77	0.84	0.89	0.93	0.96	0.977	0.994	0.999

Kvantilfunktionen $F_{t_{\text{df}}}^{-1}(q)$ för t–fördelningen

	$q = 0.9$	$q = 0.95$	$q = 0.975$	$q = 0.99$
df = 1	3.08	6.31	12.71	31.82
df = 2	1.89	2.92	4.30	6.96
df = 3	1.64	2.35	3.18	4.54
df = 4	1.53	2.13	2.78	3.75
df = 5	1.48	2.02	2.57	3.36
df = 7	1.41	1.89	2.36	3.00
df = 10	1.37	1.81	2.23	2.76
df = 15	1.34	1.75	2.13	2.60
df = 20	1.33	1.72	2.09	2.53
df = 30	1.31	1.70	2.04	2.46
df = 50	1.30	1.68	2.01	2.40
df = 100	1.29	1.66	1.98	2.36
df = ∞	1.28	1.64	1.96	2.33

Kvantilfunktionen $F_{\chi^2_{\text{df}}}^{-1}(q)$ för χ^2–fördelningen

	$q = 0.025$	$q = 0.05$	$q = 0.1$	$q = 0.9$	$q = 0.95$	$q = 0.975$
df = 1	0.001	0.004	.02	2.71	3.84	5.02
df = 2	0.05	0.10	0.21	4.61	5.99	7.38
df = 3	0.22	0.35	0.58	6.25	7.81	9.35
df = 4	0.48	0.71	1.06	7.78	9.49	11.1
df = 5	0.83	1.15	1.61	9.24	11.1	12.8
df = 7	1.69	2.17	2.83	12.02	14.1	16.0
df = 10	3.25	3.94	4.87	16.0	18.3	20.5
df = 15	6.26	7.26	8.55	22.3	25.0	27.5
df = 20	9.59	10.9	12.4	28.4	31.4	34.2