Matematiska Vetenskaper 2023–08–15 EM
Chalmers Tekniska Högskola Examinator: Tony Johansson (1069)

MVE302, MVE395, TMA321
Tentamen

Detta är en sammanslagning av tentamen för de tre kurserna.
Notera att uppgifter märkta **MVE302** ej ingår på tentamen
för MVE395 och TMA321.

TMA321 & MVE395: 12–17p ger trea, 18–23p ger fyra, 24–30p ger femma.

MVE302: 16–23p ger trea, 24–31p ger fyra, 33–40p ger femma.

Tillåtna hjälpmedel:

- valfri miniräknare,
- Mathematics Handbook (Beta),
- 2 blad (totalt 4 sidor) handskrivna anteckningar (utskrivna anteckningar från skrivplatta godkänns),
- tabeller bifogade till tesen.

---

1. (5p) Två kontinuerliga slumpvariabler X, Y har simultan täthetsfunktion

$$f(x, y) = c(x + y)e^{-x}, \quad 0 < y < x,$$

för någon constant $c > 0$.

(a) Bestäm konstanten c.

(b) Beräkna $\mathbb{E}[X]$.

(c) Beräkna $\mathbb{E}[Y]$.

(d) Beräkna $\text{Cov}(X, Y)$.

Tips. För heltal $k \geq 0$ gäller att $\int_0^\infty x^k e^{-x} dx = k!$.

2. (5p) En vanlig sexsidig tärning kastas n gånger, och S_n betecknar summan av de n kastens utfall. Hitta konstanter $\alpha, \beta > 0$ sådana att

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(S_n \leq 3.5n + \alpha n^\beta) = 0.999.$$

3. (5p) Följande data kommer från en normalfördelning med okänt väntevärde μ och okänd varians σ^2:

$$1.01,\ 1.22,\ 1.31,\ 1.66,\ 1.87,\ 2.15,\ 2.75,\ 3.21.$$

Ange ett 95% konfidensintervall för μ, och ta ställning till $H_0 : \mu = 1$ mot $H_A : \mu \neq 1$ på signifikansnivå 0.05.

4. (5p) Antag att $X \sim \Gamma(3, \theta)$, så att X har följande täthetsfunktion med parameter $\theta > 0$:

$$f_\theta(x) = \frac{\theta^3 x^2}{2} e^{-\theta x}, \quad x > 0.$$

Hitta en maximum likelihood–skattning av θ.

5. (4p) Låt $X_1, X_2, \ldots$ vara oberoende slumpvariabler med

$$\mathbb{P}(X_k = 1) = \mathbb{P}(X_k = -1) = \frac{1}{2}, \quad \text{för alla } k.$$

Definiera $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. För heltal $k \neq 0$ definieras

$$T_k = \min\{n \geq 1 : S_n = k\}.$$

Beräkna $\mathbb{P}(T_{-1} < T_2)$.

6. (6p) En kontinuerlig populationsvariabel X, likformigt fördelad på intervallet $[0, \theta]$ för något $\theta > 0$, studeras. Ett stickprov av storlek $n = 4$ tas, och vi noterar teststatistikan

$$\max\{x_1, x_2, x_3, x_4\} = 3.1.$$

Ange, baserat på detta, ett 95% konfidensintervall för θ på formen $[a, \infty)$.

7. **(MVE302, 3+3p)** Anta att vi känner till att en populationsvariabel X är normalfördelad med varians 10 och okänt väntevärde μ. Vi vill testa nollhypotesen $H_0 : \mu = 0$ mot alternativhypotesen $H_1 : \mu > 0$, med ett stickprov av storlek $n = 10$. Som teststatistika används stickprovsmedelvärdet $\overline{X}$. Vi kommer fram till att H_0 ska förkastas på signifikansnivå α om $\overline{X} > 1.75$.

(a) Vad är signifikansnivån α?

(b) För vilket värde på μ gäller att testets styrka är 99.9%?

8. **(MVE302, 4p)** Låt $X_1, X_2, \ldots$ vara oberoende likformiga slumpvariabler med väntevärde 0 och ändlig varians σ^2. Anta att varje X_i har en momentgenererande funktion $M_i(t)$ som är konvergent för alla $t \in \mathbb{R}$. Notera att variablerna inte nödvändigtvis har samma fördelning. Låt

$$Z_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n X_k$$

och visa att den momentgenererande funktionen för Z_n konvergerar punktvis till den momentgenererande funktionen för $N(0, 1)$.

Tabeller

Om det värde du söker saknas i en tabell, använd det närmast tillgängliga.

Fördelningsfunktionen $\Phi(z) = F_Z(z)$ för $Z \sim N(0,1)$

z	0	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5	1.75	2	2.5	3
$\Phi(z)$	0.5	0.6	0.69	0.77	0.84	0.89	0.93	0.96	0.977	0.994	0.999

Kvantilfunktionen $F_{t_{\mathrm{df}}}^{-1}(q)$ för t–fördelningen

	$q = 0.9$	$q = 0.95$	$q = 0.975$	$q = 0.99$
df = 1	3.08	6.31	12.71	31.82
df = 2	1.89	2.92	4.30	6.96
df = 3	1.64	2.35	3.18	4.54
df = 4	1.53	2.13	2.78	3.75
df = 5	1.48	2.02	2.57	3.36
df = 7	1.41	1.89	2.36	3.00
df = 10	1.37	1.81	2.23	2.76
df = 15	1.34	1.75	2.13	2.60
df = 20	1.33	1.72	2.09	2.53
df = 30	1.31	1.70	2.04	2.46
df = 50	1.30	1.68	2.01	2.40
df = 100	1.29	1.66	1.98	2.36
df = ∞	1.28	1.64	1.96	2.33

Kvantilfunktionen $F_{\chi^2_{\mathrm{df}}}^{-1}(q)$ för χ^2–fördelningen

	$q = 0.025$	$q = 0.05$	$q = 0.1$	$q = 0.9$	$q = 0.95$	$q = 0.975$
df = 1	0.001	0.004	.02	2.71	3.84	5.02
df = 2	0.05	0.10	0.21	4.61	5.99	7.38
df = 3	0.22	0.35	0.58	6.25	7.81	9.35
df = 4	0.48	0.71	1.06	7.78	9.49	11.1
df = 5	0.83	1.15	1.61	9.24	11.1	12.8
df = 7	1.69	2.17	2.83	12.02	14.1	16.0
df = 10	3.25	3.94	4.87	16.0	18.3	20.5
df = 15	6.26	7.26	8.55	22.3	25.0	27.5
df = 20	9.59	10.9	12.4	28.4	31.4	34.2

Lösningar

1. (5p) Två kontinuerliga slumpvariabler X, Y har simultan täthetsfunktion

$$f(x,y) = c(x+y)e^{-x}, \quad 0 < y < x,$$

för någon constant $c > 0$.

(a) Bestäm konstanten c.

(b) Beräkna $\mathbb{E}[X]$.

(c) Beräkna $\mathbb{E}[Y]$.

(d) Beräkna $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

Tips. För heltal $k \geq 0$ gäller att $\int_0^\infty x^k e^{-x} dx = k!$.

Lösning.

(a) Integralen av täthetsfunktionen ska vara 1, så vi har

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c} &= \int_0^\infty e^{-x} \int_0^x (x+y) dy dx \\
&= \int_0^\infty e^{-x} \left[xy + \frac{1}{2} y^2 \right]_{y=0}^x dx \\
&= \int_0^\infty \frac{3}{2} x^2 e^{-x} dx \\
&= 3.
\end{aligned}$$

Alltså är $c = 1/3$.

(b) Vi har

$$\mathbb{E}[X] = \iint x f(x,y) dx dy$$

med integralen över $0 < y < x$. Alltså,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \frac{1}{3} \int_0^\infty x e^{-x} \int_0^x (x+y) dy dx \\
&= \frac{1}{3} \int_0^\infty \frac{3}{2} x^3 e^{-x} dx \\
&= 3.
\end{aligned}$$

(c) Nu tar vi integralen av $yf(x,y)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y] &= \frac{1}{3}\int_0^\infty e^{-x}\int_0^x y(x+y)dydx \\
&= \frac{1}{3}\int_0^\infty e^{-x}\left[\frac{xy^2}{2}+\frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^x dx \\
&= \frac{1}{3}\int_0^\infty \frac{5}{6}x^3e^{-x}dx \\
&= \frac{5}{3}.
\end{aligned}$$

(d) Vi beräknar

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[XY] &= \iint xyf(x,y)dxdy \\
&= \frac{1}{3}\int_0^\infty xe^{-x}\int_0^x y(x+y)dydx \\
&= \frac{1}{3}\int_0^\infty xe^{-x}\cdot\frac{5}{6}x^3dx \\
&= \frac{5}{18}\int_0^\infty x^4e^{-x}dx \\
&= \frac{5}{18}\cdot 24 = \frac{20}{3}.
\end{aligned}$$

Då är

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y] = \frac{20}{3} - 3\cdot\frac{5}{3} = \frac{5}{3}.$$

2. (5p) En vanlig sexsidig tärning kastas n gånger, och S_n betecknar summan av de n kastens utfall. Hitta konstanter $\alpha, \beta > 0$ sådana att

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(S_n \le 3.5n + \alpha n^\beta) = 0.999.$$

Lösning. Låt X_1 vara ögonsumman på det första tärnignskastet. Detta har väntevärde $\mu = 3.5$ och varians $\sigma^2 = 35/12 \approx 2.92$. Centrala gränsvärdessatsen säger då att

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(S_n \le 3.5n + x\sigma n^{1/2}) = \Phi(x).$$

Enligt tabell är $\Phi(x) = 0.999$ när $x = 3$, så alltså gäller att

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(S_n \le 3.5n + 3\sigma n^{1/2}) = 0.999.$$

Vi läser av att vi kan ta $\beta = 1/2$ och $\alpha = 3\sigma = 3\sqrt{2.92} = 5.12$.

3. (5p) Följande data kommer från en normalfördelning med okänt väntevärde μ och okänd varians σ^2:

$$1.01,\ 1.22,\ 1.31,\ 1.66,\ 1.87,\ 2.15,\ 2.75,\ 3.21.$$

Ange ett 95% konfidensintervall för μ, och ta ställning till $H_0 : \mu = 1$ mot $H_A : \mu \neq 1$ på signifikansnivå 0.05.

Lösning. Vi beräknar stickprovsmedelvärde och -standardavvikelse:

$$\overline{x} = 1.9, \quad s = 0.77.$$

Ett 95% konfidensintervall för μ får vi via formeln

$$\mu \in \overline{x} \pm F_{t_{n-1}}^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\frac{s}{\sqrt{n}} \quad (1-\alpha).$$

Konfidensgrad 95% motsvarar $\alpha = 0.05$. Kvantilen $F_{t_7}^{-1}(0.975) = 2.36$ hämtas från tabell, så vi får

$$\mu \in 1.9 \pm 2.36 \cdot \frac{0.77}{\sqrt{8}} = 1.9 \pm 0.64 \quad (95\%).$$

Konfidensintervallet innehåller inte talet 1, så vi förkastar H_0 på signifikansnivå $\alpha = 0.05$.

4. (5p) Antag att $X \sim \Gamma(3, \theta)$, så att X har följande täthetsfunktion med parameter $\theta > 0$:

$$f_\theta(x) = \frac{\theta^3 x^2}{2} e^{-\theta x}, \quad x > 0.$$

Hitta en maximum likelihood–skattning av θ.

Lösning. För ett stickprovsutfall $x_1, \dots, x_n$ ges loglikelihoodfunktionen av

$$\begin{aligned}
\ell(\theta) &= \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{\theta^3 x_i^2}{2} e^{-\theta x}\right) \\
&= n \ln\left(\frac{\theta^3}{2}\right) + 2\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) - \theta \sum_{i=1}^{n} x_i \\
&= 3n \ln \theta + 2\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) - \theta \sum_{i=1}^{n} x_i - n \ln 2.
\end{aligned}$$

Denna ska maximeras med avseende på θ, så vi deriverar:

$$\ell'(\theta) = \frac{3n}{\theta} - \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Derivatan är noll med negativ andraderivata vid

$$\widehat{\theta} = \frac{3n}{\sum_{i=1}^{n} x_i} = \frac{3}{\overline{x}}.$$

Detta är vår ML–skattning.

5. (4p) Låt $X_1, X_2, \ldots$ vara oberoende slumpvariabler med

$$\mathbb{P}(X_k = 1) = \mathbb{P}(X_k = -1) = \frac{1}{2}, \quad \text{för alla } k.$$

Definiera $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. För heltal $k \neq 0$ definieras

$$T_k = \min\{n \geq 1 : S_n = k\}.$$

Beräkna $\mathbb{P}(T_{-1} < T_2)$.

Lösning. Enligt totala sannolikhetslagen gäller att

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_{-1} < T_2) = \mathbb{P}(T_{-1} < T_2 \mid X_1 = -1)\mathbb{P}(X_1 = -1) \\ + \mathbb{P}(T_{-1} < T_2 \mid X_1 = 1)\mathbb{P}(X_1 = 1). \end{aligned}$$

Eftersom $X_1 = -1$ implicerar $T_{-1} < T_2$, så gäller att $\mathbb{P}(T_{-1} < T_2 \mid X_1 = -1) = 1$. Vi har då

$$\mathbb{P}(T_{-1} < T_2) = 1 \cdot \frac{1}{2} + \mathbb{P}(T_{-1} < T_2 \mid X_1 = 1)\frac{1}{2}. \tag{1}$$

Vi behöver förstå $\mathbb{P}(T_{-1} < T_2 \mid X_1 = 1)$. Vi tänker oss att en ny process

$$S'_n = \sum_{k=2}^{n} X_k$$

börjar vid punkten $(1, 1)$. Låt T'_k vara det första tillfället då $S'_n = k$. Variabeln S'_n har samma fördelning som S_{n-1}, och om vi betingar på $X_1 = 1$ så gäller att

$$\{T_{-1} < T_2\} \cap \{X_1 = 1\} = \{T'_{-2} < T'_1\}.$$

Slutsatsen är att

$$\mathbb{P}(T_{-1} < T_2 \mid X_1 = 1) = \mathbb{P}(T'_{-2} < T'_1) = \mathbb{P}(T_{-2} < T_1). \tag{2}$$

Men processen är symmetrisk, så vi måste ha

$$\mathbb{P}(T_{-2} < T_1) = \mathbb{P}(T_{-1} > T_2) = 1 - \mathbb{P}(T_{-1} < T_2). \tag{3}$$

Vi slår ihop (1), (2), (3) och får

$$\mathbb{P}(T_{-1} < T_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(1 - \mathbb{P}(T_{-1} < T_2)\right).$$

Här kan vi lösa ut $\mathbb{P}(T_{-1} < T_2) = 2/3$.

6. (6p) En kontinuerlig populationsvariabel X, likformigt fördelad på intervallet $[0, \theta]$ för något $\theta > 0$, studeras. Ett stickprov av storlek $n = 4$ tas, och vi noterar teststatistikan

$$\max\{x_1, x_2, x_3, x_4\} = 3.1.$$

Ange, baserat på detta, ett 95% konfidensintervall för θ på formen $[a, \infty)$.

Lösning. Vår teststatistika är alltså

$$M = \max\{X_1, X_2, X_3, X_4\}.$$

Målet blir att hitta en funktion $a(M)$ sådan att, givet ett stickprov $X_1, \ldots, X_4$,

$$\mathbb{P}(a(M) \leq \theta) = 0.95. \tag{4}$$

För att kunna hitta en sådan funktion behöver vi förstå fördelningen hos M. För $0 < x < \theta$ gäller att

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(M \leq x) &= \mathbb{P}(X_i \leq x,\ \text{alla } i) \\ &= \mathbb{P}(X_1 \leq x)^4 \\ &= \left(\frac{x}{\theta}\right)^4. \end{aligned}$$

Vi noterar då att

$$0.95 = \left(\frac{x}{\theta}\right)^4,\ x > 0 \Longrightarrow x = 0.95^{1/4}\theta.$$

Alltså är

$$\mathbb{P}(M \leq 0.95^{1/4}\theta) = 0.95.$$

Med andra ord,

$$\mathbb{P}\left(\frac{M}{0.95^{1/4}} \leq \theta\right) = 0.95.$$

Vi ser att $a(M) = M/0.95^{1/4}$ uppfyller (4). Utfallet $M = 3.1$ ger

$$a = \frac{3.1}{0.95^{1/4}} = 3.14.$$

Konfidensintervallet är $[3.14, \infty)$.

7. **(MVE302, 3+3p)** Anta att vi känner till att en populationsvariabel X är normalfördelad med varians 10 och okänt väntevärde μ. Vi vill testa nollhypotesen $H_0 : \mu = 0$ mot alternativhypotesen $H_1 : \mu > 0$, med ett stickprov av storlek $n = 10$. Som teststatistika används stickprovsmedelvärdet $\overline{X}$. Vi kommer fram till att H_0 ska förkastas på signifikansnivå α om $\overline{X} > 1.75$.

(a) Vad är signifikansnivån α?

(b) För vilket värde på μ gäller att testets styrka är 99.9%?

Lösning.

(a) Vi ska ha

$$\alpha = \mathbb{P}_{H_0}(\overline{X} > 1.75).$$

Under H_0 gäller att $\overline{X} \sim N(0, 10/10) = N(0,1)$. Alltså är, enligt tabell,

$$\alpha = \mathbb{P}_{H_0}(\overline{X} > 1.75) = 0.04.$$

(b) Styrkan för $\mu > 0$ ges av

$$\beta(\mu) = \mathbb{P}_{\mu}(\overline{X} > 1.75).$$

Vi har $\overline{X} \sim N(\mu, 1)$, alltså $\overline{X} - \mu \sim N(0,1)$, och

$$\beta(\mu) = \mathbb{P}_{\mu}(\overline{X} - \mu > 1.75 - \mu) = 1 - \Phi(1.75 - \mu) = \Phi(\mu - 1.75).$$

Enligt tabell är detta 0.999 när $\mu - 1.75 = 3$, alltså $\mu = 4.75$.

8. **(MVE302, 4p)** Låt $X_1, X_2, \ldots$ vara oberoende likformiga slumpvariabler med väntevärde 0 och ändlig varians σ^2. Anta att varje X_i har en momentgenererande funktion $M_i(t)$ som är konvergent för alla $t \in \mathbb{R}$. Notera att variablerna inte nödvändigtvis har samma fördelning. Låt

$$Z_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} X_k$$

och visa att den momentgenererande funktionen för Z_n konvergerar punktvis till den momentgenererande funktionen för $N(0,1)$.

Lösning. Eftersom variablerna X_k är oberoende gäller för varje $t \in \mathbb{R}$ att

$$M_{Z_n}(t) = \mathbb{E}\left[\exp\left\{\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} X_k\right\}\right] = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[e^{\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} X_k}\right] = \prod_{k=1}^{n} M_k\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right).$$

För stora n gäller enligt Taylors formel att

$$M_k\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) = M_k(0) + \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} M_k'(0) + \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2 \frac{M_k''(0)}{2} + O(n^{-3/2}).$$

Eftersom $\mu = 0$ gäller att

$$M_k(0) = 1, \quad M_k'(0) = \mu = 0, \quad M_k''(0) = \mathbb{E}\left[X_k^2\right] = \sigma^2 + \mu^2 = \sigma^2.$$

Vi har då

$$M_k\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) = 1 + \frac{t^2}{2n} + O(n^{-3/2}),$$

och

$$M_{Z_n}(t) = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{t^2}{2n} + O(n^{-3/2})\right).$$

Taylors formel ger

$$1 + \frac{t^2}{2n} + O(n^{-3/2}) = \exp\left\{\frac{t^2}{2n} + O(n^{-3/2})\right\},$$

så

$$\begin{aligned} M_{Z_n}(t) &= \prod_{k=1}^{n} \exp\left\{\frac{t^2}{2n} + O(n^{-3/2})\right\} \\ &= \exp\left\{\frac{t^2}{2} + O(n^{-1/2})\right\}. \end{aligned}$$

Detta konvergerar punktvis till $e^{t^2/2}$, som är mgf:en för $N(0,1)$.