Matematiska Vetenskaper 2023–10–07 EM
Chalmers Tekniska Högskola Examinator: Tony Johansson (1069)

MVE302, MVE395, TMA321
Statistik
Tentamen

Detta är en sammanslagning av tentamen för de tre kurserna.
Notera att uppgifter märkta **MVE302** ej ingår på tentamen
för MVE395 och TMA321.

TMA321 & MVE395: 12–17p ger trea, 18–23p ger fyra, 24–30p ger femma.

MVE302: 16–23p ger trea, 24–31p ger fyra, 33–40p ger femma.

Tillåtna hjälpmedel:

- valfri miniräknare,
- Mathematics Handbook (Beta),
- 2 blad (totalt 4 sidor) handskrivna anteckningar (utskrivna anteckningar från skrivplatta godkänns),
- tabeller bifogade till tesen.

---

1. (5p) Två kontinuerliga slumpvariabler X, Y har simultan täthetsfunktion

$$f(x,y) = e^{-y}, \quad 0 < x < y.$$

Tips. För heltal $k \geq 0$ gäller att $\int_0^\infty x^k e^{-x} dx = k!$.

(a) Hitta $f_X(x)$ för alla $x > 0$.

(b) Hitta $f_{Y|X}(y \mid x)$ för alla $0 < x < y$.

(c) Visa att X och $Y - X$ är oberoende och likfördelade.

(d) Beräkna $\mathbb{E}[Y]$ och $\mathrm{Var}(Y)$, förslagsvis med hjälp av **(d)**.

2. (5p) En vanlig sexsidig tärning kastas n gånger, och S_n betecknar summan av utfallen av de n kasten. Välj konstanterna a, b så att

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(an - b\sqrt{n} \leq S_n \leq an + b\sqrt{n}\right) = 0.99.$$

3. (5p) För att avgöra om ett mynt är rättvist, det vill säga ger 50% chans till klave vid singling, gör Boel ett hypotestest. Hon låter p beteckna myntets sannolikhet för klave, och ställer upp nollhypotes $H_0 : p = 0.5$ och alternativhypotes $H_1 : p \neq 0.5$. Hon singlar slanten $n = 400$ gånger, och låter X beteckna antalet klave.

För testet väljer Boel signifikansnivå $\alpha = 0.05$, och en region $\mathcal{R}$ sådan att $X \in \mathcal{R}$ leder till att hon förkastar nollhypotesen. Ange $\mathcal{R}$, med hjälp av lämpliga approximationer.

4. (5p) Antag att $X \sim \Gamma(2, \theta)$, så att X har följande täthetsfunktion med parameter $\theta > 0$:

$$f_\theta(x) = \theta^2 x e^{-\theta x}, \quad x > 0.$$

Hitta en maximum likelihood–skattning av θ.

5. (5p) Låt N vara en Poissonfördelad slumpvariabel med intensitet $\lambda > 0$, och låt $X_1, X_2, \ldots$ vara oberoende slumpvariabler, likformigt fördelade på $[0,1]$, som även är oberoende av N. Definiera en slumpvariabel

$$T = \begin{cases} \min\{X_1, \ldots, X_N\} & \text{om } N \geq 1, \\ 1 & \text{om } N = 0. \end{cases}$$

Beräkna $F(t) = \mathbb{P}(T \leq t)$ för alla $0 < t < 1$.

Tips. För alla $x \in \mathbb{R}$ gäller att $\sum_{n=1}^{\infty} x^n/n! = e^x - 1$.

6. (5p) En kontinuerlig populationsvariabel X är exponentialfördelad med okänd intensitet $\theta > 0$. Alltså har X täthetsfunktion

$$f_X(x) = \theta e^{-\theta x}, \quad x > 0.$$

Ett stickprov av storlek $n = 4$ tas, och vi noterar teststatistikan

$$\min\{x_1, x_2, x_3, x_4\} = 0.1.$$

Ange, baserat på detta, ett 95% konfidensintervall för θ på formen $[a, \infty)$.

7. (**MVE302**, 3+2p) Anta att vi känner till att en populationsvariabel X är normalfördelad med varians 20 och okänt väntevärde μ. Vi vill testa nollhypotesen $H_0 : \mu = 0$ mot alternativhypotesen $H_1 : \mu > 0$, med ett stickprov av storlek $n = 5$. Som teststatistika används stickprovsmedelvärdet $\overline{X}$. Vi kommer fram till att H_0 ska förkastas på signifikansnivå α om $\overline{X} > 2.5$.

(a) Vad är signifikansnivån α?

(b) För vilket värde på μ gäller att testets styrka är 90%?

8. (**MVE302**, 3+2p) En populationsvariabel X är Bernoullifördelad, $X \sim \text{Bin}(1, \lambda)$, och vi är intresserade av parametern $\lambda \in [0, 1]$. Vi väljer en Bayesiansk approach, och introducerar en slumpvariabel Λ och gör observationer $x_1, \ldots, x_n$.

(a) (3p) Som priorfördelning väljer vi Betafördelningen $\mathcal{B}(4, 3)$. Vad är posteriorfördelningen för Λ?

(b) (2p) Skatta λ via ett posterior mean estimate $\hat{\lambda}_{\text{pme}}$.

Tips. En stokastisk variabel $Y \sim \mathcal{B}(a, b)$ har täthetsfunktion

$$f_Y(y) = \frac{1}{B(a,b)} y^{a-1}(1-y)^{b-1}, \quad 0 < y < 1,$$

där den normaliserande konstanten $B(a, b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1} dt$ ges av

$$B(a,b) = \frac{(a-1)!(b-1)!}{(a+b-1)!} \quad \text{om } a \text{ och } b \text{ är heltal.}$$

Tabeller

Om det värde du söker saknas i en tabell, använd det närmast tillgängliga.

Fördelningsfunktionen $\Phi(z) = F_Z(z)$ för $Z \sim N(0, 1)$

z	0	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5	1.75	2	2.5	3
$\Phi(z)$	0.5	0.6	0.69	0.77	0.84	0.89	0.93	0.96	0.977	0.994	0.999

Kvantilfunktionen $F^{-1}_{t_{\mathrm{df}}}(q)$ för t–fördelningen

	$q = 0.9$	$q = 0.95$	$q = 0.975$	$q = 0.99$
df = 1	3.08	6.31	12.71	31.82
df = 2	1.89	2.92	4.30	6.96
df = 3	1.64	2.35	3.18	4.54
df = 4	1.53	2.13	2.78	3.75
df = 5	1.48	2.02	2.57	3.36
df = 7	1.41	1.89	2.36	3.00
df = 10	1.37	1.81	2.23	2.76
df = 15	1.34	1.75	2.13	2.60
df = 20	1.33	1.72	2.09	2.53
df = 30	1.31	1.70	2.04	2.46
df = 50	1.30	1.68	2.01	2.40
df = 100	1.29	1.66	1.98	2.36
df = ∞	1.28	1.64	1.96	2.33

Kvantilfunktionen $F^{-1}_{\chi^2_{\mathrm{df}}}(q)$ för χ^2–fördelningen

	$q = 0.025$	$q = 0.05$	$q = 0.1$	$q = 0.9$	$q = 0.95$	$q = 0.975$
df = 1	0.001	0.004	.02	2.71	3.84	5.02
df = 2	0.05	0.10	0.21	4.61	5.99	7.38
df = 3	0.22	0.35	0.58	6.25	7.81	9.35
df = 4	0.48	0.71	1.06	7.78	9.49	11.1
df = 5	0.83	1.15	1.61	9.24	11.1	12.8
df = 7	1.69	2.17	2.83	12.02	14.1	16.0
df = 10	3.25	3.94	4.87	16.0	18.3	20.5
df = 15	6.26	7.26	8.55	22.3	25.0	27.5
df = 20	9.59	10.9	12.4	28.4	31.4	34.2