

(1)

Föreläsning 6, 2 feb. 2022Ans. 7.1

Def. En funktion $f(x)$ sägs ha ett lokalt maximum i en punkt $x=a$ om;

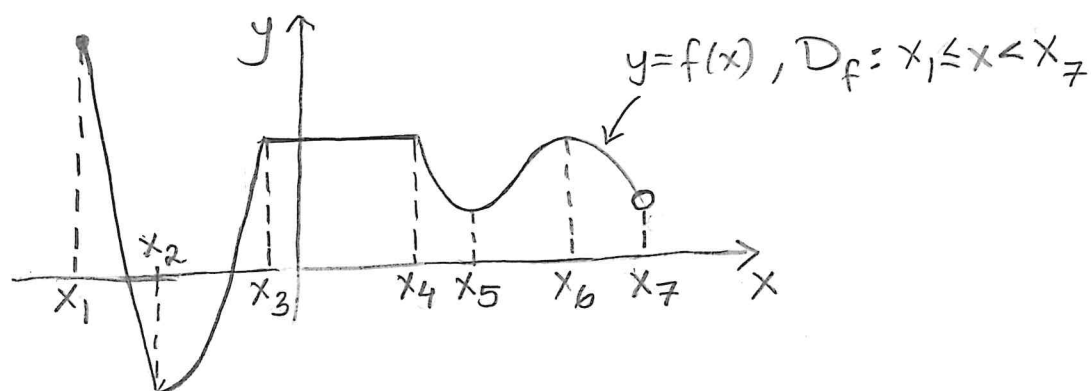
$$f(x) \leq f(a)$$

för alla $x \in D_f$ i någon omgivning av $x=a$,
dvs. om det $\exists \delta > 0$ s.a.

$$(x \in D_f) \wedge (|x-a| < \delta) \Rightarrow f(x) \leq f(a)$$

Anm. Lokalt minimum definieras analogt,
fast med olikheten $f(x) \geq f(a)$.

Anm. Lokala maximi- och minimi-punkter kallas
gemensamt för lokala extrempunkter.

Ex.

f har lokalt maximum i $x=x_1, x_6$, samt
i alla punkter x i intervallet $[x_3, x_4]$.

f har lokalt minimum i $x=x_2, x_5$, samt
i alla punkter x i intervallet (x_3, x_4)

obs! f har inte lokalt minimum där $x=x_7$

(2)

Vidare ser vi att funktionens största resp. minsta värde på intervallet $[x_1, x_7)$ är $f(x_1)$ resp. $f(x_2)$.

Anm. Notera i ovanstående exempel att $f'(x_5) = C$
 $f'(x_6) = 0$ och $f'(x) = 0$ för alla $x \in (x_3, x_4)$

Sats. 7.1.2 (om derivatans nollställen)

Om en funktion $f(x)$ är deriverbar i en lokal extrempunkt $x=a$ i det inre av D_f så är
$$f'(a) = 0$$

bevis. Om $f(x)$ har ett lokalt maximum i en punkt $x=a$ i det inre av D_f så existerar ett öppet intervall $I \subseteq D_f$ kring $x=a$ där;

$$f(x) \leq f(a), \forall x \in I$$

Om $f(x)$ är deriverbar i $x=a$ följer speciellt att;

$$f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{\overbrace{f(x) - f(a)}^{\leq 0}}{\underbrace{x - a}_{< 0}} \geq 0$$

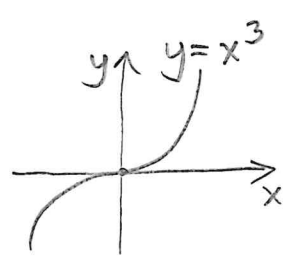
$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\overbrace{f(x) - f(a)}^{\leq 0}}{\underbrace{x - a}_{> 0}} \leq 0$$

så $0 \leq f'_-(a) = f'(a) = f'_+(a) \leq 0$
varpå det följer att $f'(a) = 0$

③ Om $f(x)$ istället har ett lokalt minimum i $x=a$ så har $-f(x)$ ett lokalt maximum i $x=a$ ty $f(x) \geq f(a) \Leftrightarrow -f(x) \leq -f(a)$
 Av ovan följer därför att $-f'(a)=0 \Leftrightarrow f'(a)=0$
 VSB.

Anm. En punkt $x=a$ som är sådan att $f'(a)=0$ sägs vara en kritisk punkt till $f(x)$.

Anm. Notera att satsen är en implikation och att omvändningen inte behöver gälla.
 Om t.ex. $f(x)=x^3$ så är $f'(0)=0$ men $x=0$ är ingen lokal extrempunkt.



uppg. Bestäm alla kritiska punkter till;

- | | |
|----------------------------|-----------------------|
| a) $4x^3 - 9x^2 - 12x + 7$ | c) $x \ln x$ |
| b) $x^2 + \frac{1}{x^2}$ | d) $2 \arctan(x) - x$ |

Lösning a) $D[4x^3 - 9x^2 - 12x + 7] = 12x^2 - 18x - 12 = 0$
 $\Leftrightarrow x^2 - \frac{3}{2}x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} + 1} = \frac{3 \pm 5}{4}$
 $\therefore$ Kritiska punkter: $x = -\frac{1}{2}, x = 2$

b) $D[x^2 + \frac{1}{x^2}] = 2x - \frac{2}{x^3} = 0 \Leftrightarrow x^4 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$
 $\therefore$ Kritiska punkter: $x = -1, x = 1$

(4)

$$c) D[x \ln x] = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1}$$

$\therefore$ Kritisk punkt: $x = e^{-1}$

$$d) D[2 \arctan(x) - x] = \frac{2}{1+x^2} - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

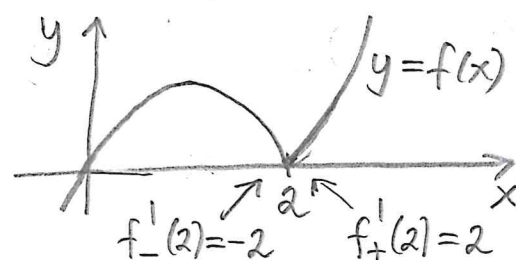
$\therefore$ Kritiska punkter: $x = -1, x = 1$

Anm. En punkt $x=a$ där $f(x)$ inte är deriverbar sägs vara en singulär punkt till $f(x)$

Ex. $x=2$ är singulär punkt till $f(x) = x|x-2|$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & \text{då } x \geq 2 \\ 2x - x^2, & \text{då } x < 2 \end{cases} = \begin{cases} (x-1)^2 - 1, & \text{då } x \geq 2 \\ 1 - (x-1)^2, & \text{då } x < 2 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 2, & \text{då } x \geq 2 \\ 2 - 2x, & \text{då } x < 2 \end{cases}$$



Sats. 7.1.1 (om största och minsta värde)

Om $f(x)$ är kontinuerlig på det slutna intervallet $[a, b]$ så antar $f(x)$ ett största och minsta värde på $[a, b]$.

Anm. Av satsen om derivatans nollställen följer att funktionens största/minsta värde måste antas i en randpunkt, singulär punkt eller kritisk punkt.

⑤

uppg. Bestäm största och minsta värde
för $f(x) = x^3 - 3x + 1$ på intervallet $[0, 2]$.

Lösning $f(x)$ är ett polynom och därför även
kontinuerlig, så enl. satsen ovan antar
 $f(x)$ ett största och minsta värde på $[0, 2]$

① Randpunkter: $f(0) = \underline{\underline{1}}$, $f(2) = \underline{\underline{3}}$

② Singulära punkter saknas ty $f(x)$
är deriverbar för alla x .

③ $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

$x = 1$ är den enda kritiska punkten i
intervallet $[0, 2]$ och där är $f(1) = \underline{\underline{-1}}$

Av ovanstående kandidater till största
resp. minsta värde (de understrukna) så
avläser vi att;

$$\max_{x \in [0, 2]} f(x) = 3 \quad \text{och} \quad \min_{x \in [0, 2]} f(x) = -1$$
