Föreläsning 7, 7 feb 2022

Avs. 7.2 (Växande & avtagande)

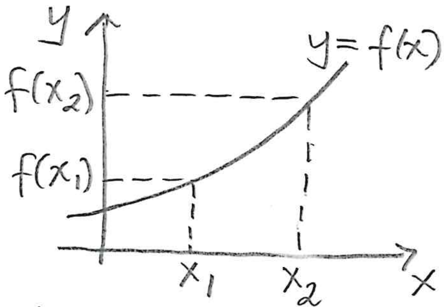
Def. En funktion $f(x)$ sägs vara;

- strängt växande på ett intervall I om

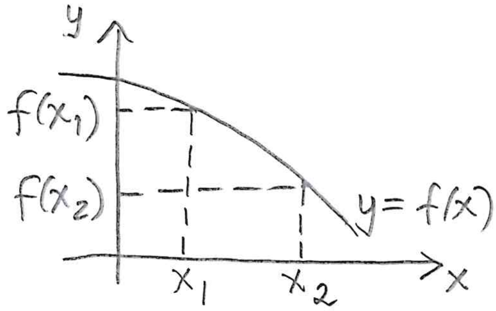
$$x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

- strängt avtagande på ett intervall I om

$$x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

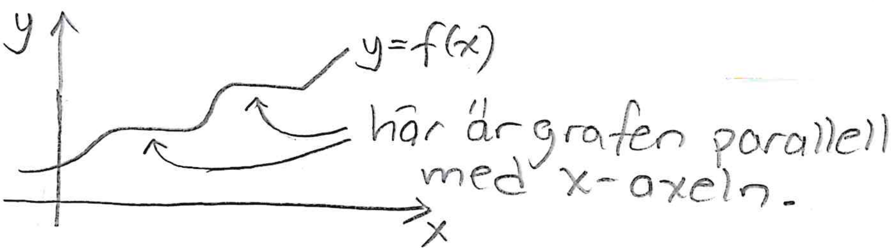


strängt växande



Anm. Om vi byter ut $f(x_1) < f(x_2)$ mot $f(x_1) \leq f(x_2)$ så sägs $f(x)$ (bara) vara växande, och på motsvarande sätt definierar vi avtagande.

En växande funktion kan t.ex. se ut så här;



En funktion som är (strängt) växande eller (strängt) avtagande sägs vara (strängt) monoton.

②

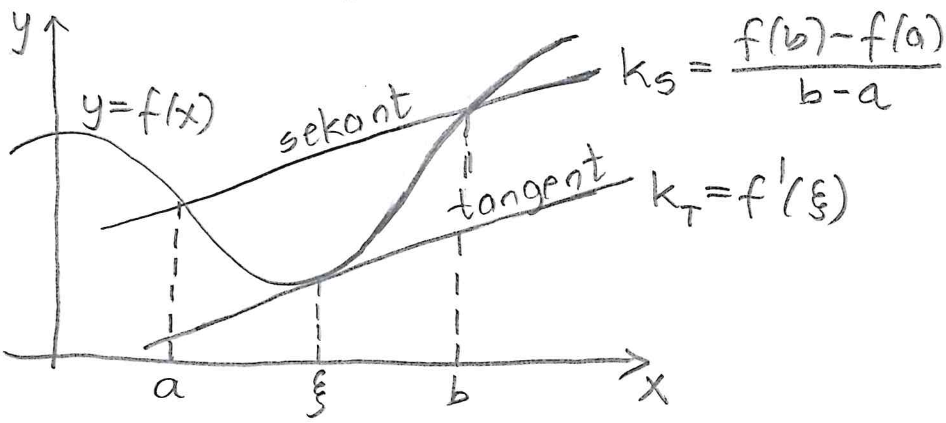
Avs. 7.3

Sats 7.3.1 (Lagrange medelvärdessats)

Om $f(x)$ är kontinuerlig på $[a,b]$ och deriverbar på (a,b) så finns det minst en punkt $\xi \in (a,b)$ sådan att;

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$$

Geometrisk tolkning av satsen:



Satsen säger att det finns minst en punkt ξ mellan a och b där $k_T = k_S$ ty;

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a) \iff f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Följdsats 7.3.2 Om $f(x)$ är deriverbar på ett intervall I så gäller;

① $f'(x)<0$, för alla $x\in I \Rightarrow f(x)$ är strängt avtagande på I

② $f'(x)=0$, för alla $x\in I \Rightarrow f(x)$ är konstant på I

③ $f'(x)>0$, för alla $x\in I \Rightarrow f(x)$ är strängt växande på I.

③ <u>bevis</u> Antag att $x_1, x_2 \in I$ och $x_1 < x_2$.

Eftersom $[x_1, x_2] \subseteq I$ så är $f(x)$ deriverbar på $[x_1, x_2]$, och därmed även kontinuerlig på $[x_1, x_2]$. Av medelvärdessatsen följer därför att det finns minst ett ξ sådant att;

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$$

Av detta följer att;

① $f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(\xi)}_{<0}\underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} < 0 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$

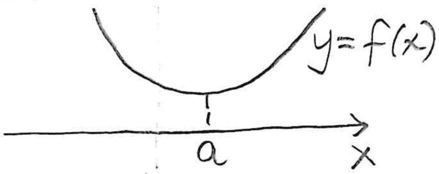
② $f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(\xi)}_{=0}(x_2 - x_1) = 0 \Rightarrow f(x_2) = f(x_1)$

③ $f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(\xi)}_{>0}\underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} > 0 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$

VSB.

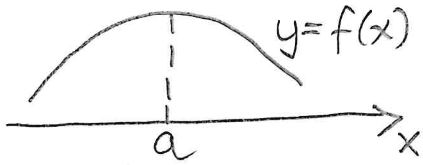
För att avgöra om en funktion har lokalt max eller min i en kritiskpunkt $x = a$ så kan vi undersöka derivatans tecken på båda sidor om den kritiska punkten. Vi kan särskilda fyra fall;

x	$<$	a	$<$
$f'(x)$	$-$	0	$+$



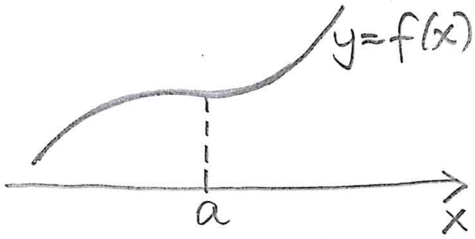
lokalt minimum

x	$<$	a	$<$
$f'(x)$	$+$	0	$-$



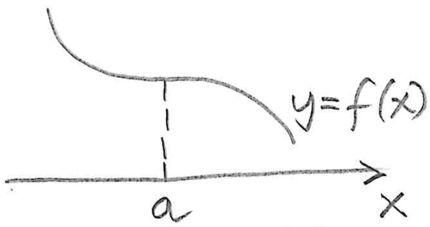
lokalt maximum

x	<	a	<
$f'(x)$	+	0	+



terasspunkt

x	<	a	<
$f'(x)$	−	0	−



terasspunkt

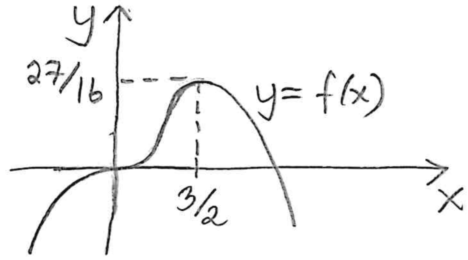
<u>uppg.</u> Bestäm alla lokala extrempunkter till;

a) $2x^3 - x^4$ b) $2\arctan(x) - x$ c) $x|x-2|$

<u>lösn.</u> a) $f(x) = 2x^3 - x^4$, $f'(x) = 6x^2 - 4x^3 = 4x^2\left(\frac{3}{2} - x\right) = 0$

$\Leftrightarrow$ $x = 0$ eller $x = \frac{3}{2}$

x	<	0	<	$3/2$	<
$f'(x)$	+	0	+	0	−
$f(x)$	↗	0	↗	$27/16$	↘

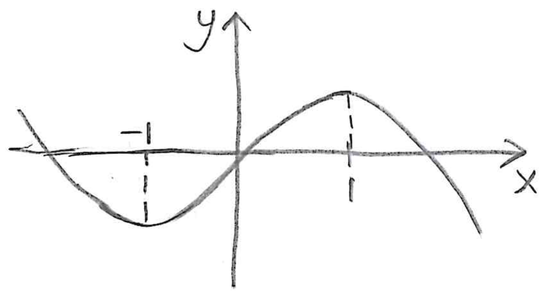


$f(x)$ har terasspunkt i $(0,0)$ och lokalt max i $\left(\frac{3}{2}, \frac{27}{16}\right)$

b) $f(x) = 2\arctan(x) - x$, $f'(x) = \frac{2}{1+x^2} - 1 = \frac{1-x^2}{1+x^2} = 0$

$\Leftrightarrow$ $x = -1$ eller $x = 1$

x	<	−1	<	1	<
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	$1-\frac{\pi}{2}$	↗	$\frac{\pi}{2}-1$	↘



$f(x)$ har ett lokalt minimum i $\left(-1, 1-\frac{\pi}{2}\right)$ och ett lokalt maximum i $\left(1, \frac{\pi}{2}-1\right)$.

(5)

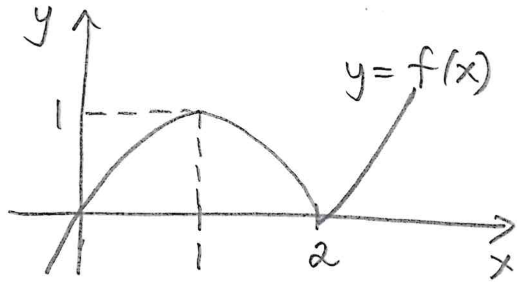
c) $f(x) = x|x-2| = \begin{cases} 2x - x^2, & \text{då } x \leq 2 \\ x^2 - 2x, & \text{då } x > 2 \end{cases}$

$f'(x) = \begin{cases} 2 - 2x, & \text{då } x < 2 \\ 2x - 2, & \text{då } x > 2 \end{cases}$ | $f(x)$ är ej deriverbar i $x=2$ ty $f'_-(2) = 2 \neq 2 = f'_+(2)$

$\underline{x<2}$: $f'(x) = 2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \underline{x = 1}$ ← obs! ligger i intervallet $x<2$

$\underline{x>2}$: $f'(x) = 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ← obs! falsk rot ty ligger ej i intervallet $x>2$

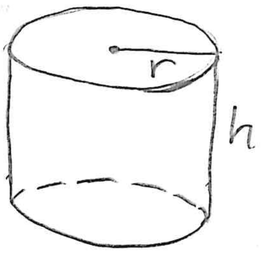
x	$<$	1	$<$	2	$<$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	/	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$



$f(x)$ har lokalt maximum i $(1,1)$ och lokalt minimum i $(2,0)$.

Uppg. Man önskar tillverka en cylindrisk konservburk (med lock) av plåt med en bestämd volym V. Dessutom vill man ge den en sådan form att plåtåtgången blir så liten som möjligt. Vilka mått bör burken ha?

Lösn.



$V = \pi r^2 h$

Plåtåtgången är; $h = \frac{V}{\pi r^2}$

$\underbrace{2\pi r^2}_{\text{arean av botten \& lock}} + \underbrace{2\pi r \cdot h}_{\text{arean av mantelytan}} = \underbrace{2\pi r^2 + \frac{2V}{r}}_{f(r),\ r>0}$

$f'(r) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = 2\frac{2\pi r^3 - V}{r^2} = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$

(6)

r	0	$<$	$\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$	$<$
$f'(r)$		$-$	0	$+$
$f(r)$	∞	$\searrow$	$f\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)$	$\nearrow$

$$h = \frac{V}{\pi r^2} \underset{\substack{\uparrow \\ r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}}}{=} \frac{V}{\pi}\left(\frac{V}{2\pi}\right)^{-2/3} = 2\left(\frac{V}{2\pi}\right)^{1/3}$$

Svar: Burken skall ha basradien $\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ och höjden $2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$

(dvs. lika hög som basdiametern)