Föreläsning 9,

Avs. 7.6 (Kurvkonstruktion)

Arbetsschema vid kurvkonstruktion:

1. Bestäm definitionsmängd
2. Bestäm eventuella asymptoter
3. Bestäm eventuella singulära och kritiska punkter.
4. Gör teckenschema
5. Skissa kurvan utifrån info i 1 - 4 ovan.

Uppg (uppg 4 på tentan 17/3-2018)

Bestäm lokala extrempunkter och asymptoter till kurvan $y=\frac{x^2+x-1}{x-1}$ och skissa kurvan.

Lösn. $f(x)=\frac{x^2+x-1}{x-1}$

1. $D_f: x \neq 1$

2. (Asymptoter) $f(x)=\frac{\overbrace{x^2+x-1}^{=1,\text{ då } x=1}}{x-1}$ $\nearrow -\infty$, då $x \to 1^-$; $\searrow \infty$, då $x \to 1^+$

spec. följer att $y=f(x)$ har lodrät asymptot $x=1$

$$f(x)=\frac{x^2+x-1}{x-1}=\frac{x+1-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} \begin{cases}\nearrow -\infty, \text{ då } x \to -\infty \\ \searrow \infty, \text{ då } x \to \infty\end{cases}$$

spec. följer att $y=f(x)$ inte har någon vågrät asymptot. Vi undersöker om det möjligen finns någon sned asymptot.

② $\frac{f(x)}{x} = \frac{x^2+x-1}{x(x-1)} = \frac{x^2+x-1}{x^2-x} = \frac{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}} \to 1 = k$, då $x \to \pm\infty$

$$f(x)-kx = \frac{x^2+x-1}{x-1} - x = \frac{x^2+x-1-x(x-1)}{x-1} =$$

$$= \frac{2x-1}{x-1} = \frac{2-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} \to 2 = m \text{, då } x \to \pm\infty$$

Så $y=f(x)$ har den sneda asymptoten $y=x+2$, då $x \to \pm\infty$

③ Singulära punkter saknas.

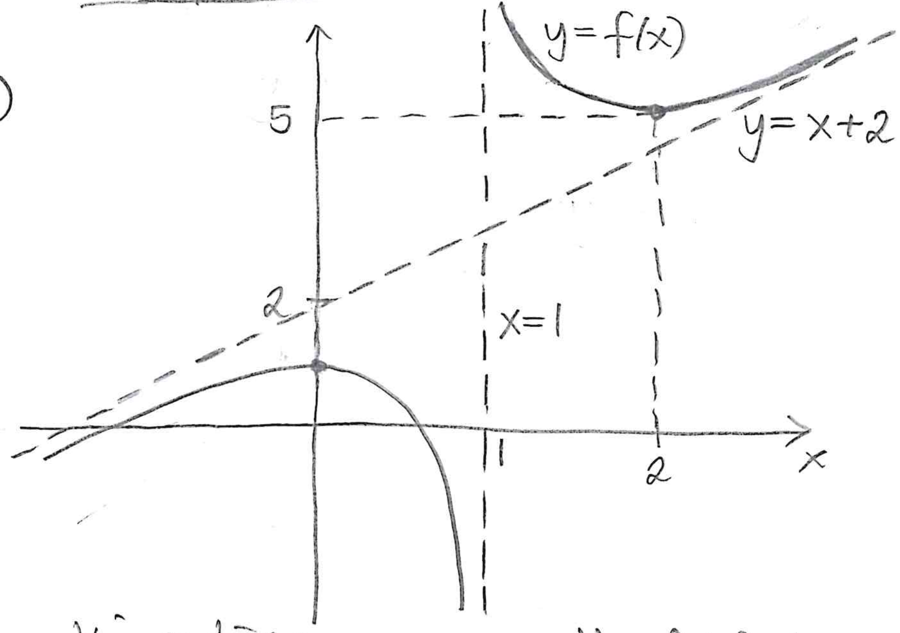
$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x-1)-(x^2+x-1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2} = 0$$

$\Leftrightarrow$ $x=0$ eller $x=2$ (kritiska punkter)

④

x	$-\infty$		0		1		2		∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$ | ∞	↘	5	↗	∞

⑤



Vi avläser spec. att $f(x)$ har lokalt maximum i $x=0$ och lokalt minimum i $x=2$.

③

Uppg. (uppg 3 på tentan 12/4-2017)

Rita grafen till funktionen $f(x)=\frac{1}{2x}-\frac{2}{\sqrt{x}}$

Lösn. ① $D_f : x>0$

② (Asymptoter) $f(x)=\frac{1}{2x}-\frac{2}{\sqrt{x}}=\frac{\overbrace{1-4\sqrt{x}}^{=1 \text{ då } x=0}}{2x}\to\infty$, då $x\to 0$

Spec. följer att $x=0$ är en lodrät asymptot, då $x\to 0^+$

$f(x)=\underbrace{\frac{1}{2x}}_{\to 0}-\underbrace{\frac{2}{\sqrt{x}}}_{\to 0}\to 0$, då $x\to\infty$

Spec. följer att $y=0$ är en vågrät asymptot, då $x\to\infty$

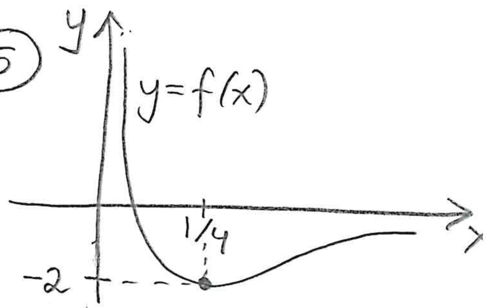
③ singulära punkter saknas.

$f'(x)=\frac{-1}{2x^2}+\frac{1}{x^{3/2}}=\frac{2\sqrt{x}-1}{2x^2}=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{4}$ ← kritisk punkt

④

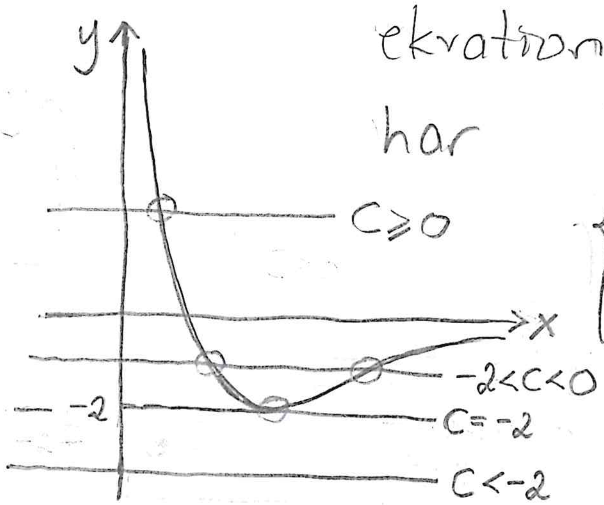
x	0		$1/4$		∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	∞	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0

⑤



Avs. 7.7 Notera också i uppgiften ovan att en ekvation av typen $f(x)=C \Leftrightarrow \frac{1}{2x}-\frac{2}{\sqrt{x}}=C$ har

$$\begin{cases} 1 \text{ lösning om } C\geq 0 \text{ eller } C=-2 \\ 2 \text{ lösningar om } -2<C<0 \\ \text{inga lösningar om } C<-2 \end{cases}$$



Uppg. (uppg 6 på tentan 17/3-2018)

Bestäm antalet rötter till ekvationen

$$e^x - C(x-1) = 0$$

för olika värden på C.

Lösn. Notera att $x=1$ inte är rot till ekvationen oavsett värde på C, så;

$$e^x - C(x-1) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^x}{x-1} = C$$

Låt $f(x) = \dfrac{e^x}{x-1}$.

① D_f: $x \neq 1$

② (Lodräta och vågräta asymptoter)

$$f(x) = \frac{e^x}{x-1} \begin{array}{l} \nearrow -\infty \text{, då } x \to 1^- \\ \searrow \infty \text{, då } x \to 1^+ \end{array}$$

Spec. är $x=1$ en lodrät asymptot då $x \to 1$.

$$f(x) = \frac{\overbrace{e^x}^{\to 0}}{\underbrace{x-1}_{\to -\infty}} \to 0 \text{, då } x \to -\infty$$

Spec. är $y=0$ en vågrät asymptot då $x \to -\infty$

$$f(x) = \frac{e^x}{x-1} = \frac{e}{\underbrace{\frac{x-1}{e^{x-1}}}_{\to 0^+}} \to \infty \text{, då } x \to \infty$$

obs! Sneda asymptoter behöver inte undersökas i denna typ av uppgift.

③ Singulära punkter saknas.

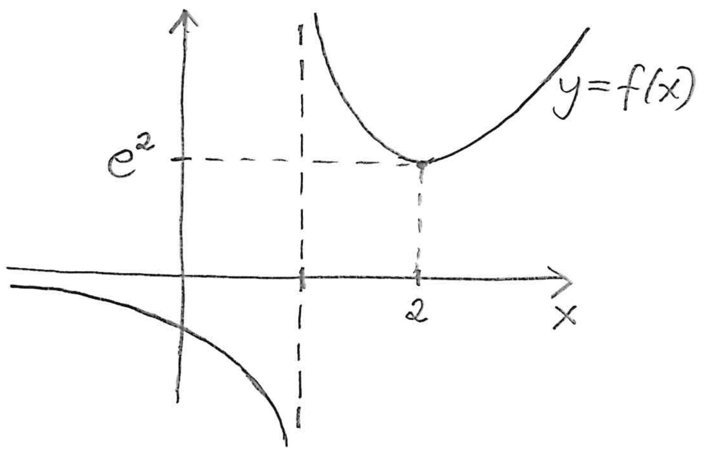
$$f'(x) = \frac{e^x(x-1)-e^x}{(x-1)^2} = \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow x=2$$

kritisk punkt

④

x	$-\infty$	$<$	1	$<$	2	$<$	∞
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$ | ∞	$\searrow$	e^2	$\nearrow$	∞

⑤



Vi avläser av grafen att ekvationen $f(x)=c$ har

$$\begin{cases} 2 \text{ rötter om } c>e^2 \\ 1 \text{ rot om } c=e^2 \text{ eller } c<0 \\ \text{inga rötter om } 0\le c<e^2 \end{cases}$$