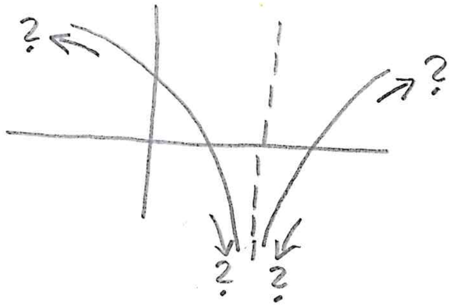
(1)

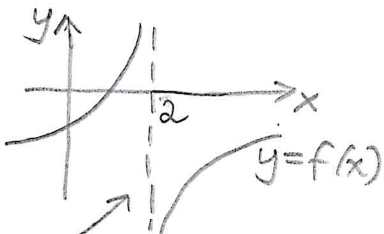
Föreläsning 8, 9 feb. 2022

Avs. 7.4 & 7.5 (Asymptoter) Vi skall nu undersöka vad som händer nära ändpunkter till definitionsmängden.



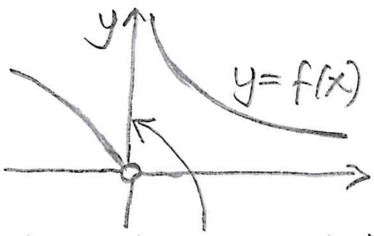
Def. En linje av typen $x=a$ sägs vara en lodrät asymptot till kurvan $y=f(x)$ om $f(x)\to\infty$ eller $f(x)\to-\infty$ då $x\to a^-$ och/eller $x\to a^+$.

Ex. $f(x)=\dfrac{3x}{2-x}$ $\nearrow \infty$, då $x\to 2^-$; $\searrow -\infty$, då $x\to 2^+$



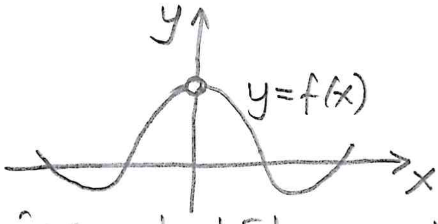
lodrät asymptot $x=2$

Ex. $f(x)=e^{1/x}$ $\nearrow 0$, då $x\to 0^-$; $\searrow \infty$, då $x\to 0^+$



lodrät asymptot $x=0$

Ex. $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}\to 1$, då $x\to 0^\pm$



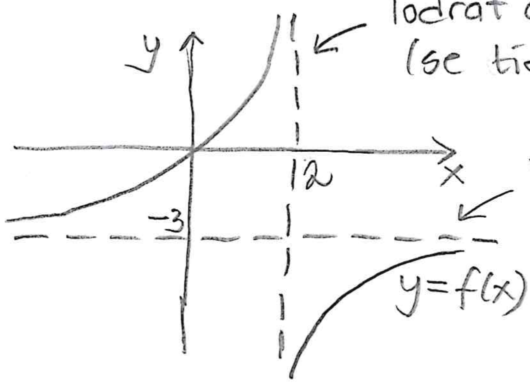
ingen lodrät asymptot i $x=0$

(2)

Def. En linje $y=m$ sägs vara en <u>vågrät asymptot</u> till $y=f(x)$ om $f(x)\to m$, då $x\to-\infty$ och/eller $x\to\infty$

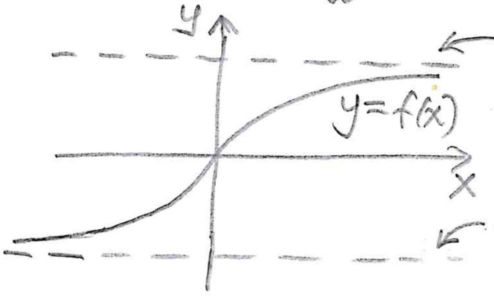
Ex. $f(x)=\dfrac{3x}{2-x}=\dfrac{3}{\frac{2}{x}-1}\to-3$, då $x\to\pm\infty$

lodrät asymptot $x=2$ (se tidigare ex)



vågrät asymptot $y=-3$, då $x\to\pm\infty$

Ex. $f(x)=\arctan x \begin{cases}\to -\frac{\pi}{2}, \text{ då } x\to-\infty\\ \to \frac{\pi}{2}, \text{ då } x\to\infty\end{cases}$

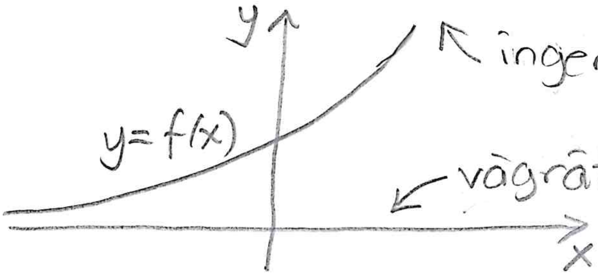


vågrät asymptot $y=\frac{\pi}{2}$, då $x\to\infty$

vågrät asymptot $y=-\frac{\pi}{2}$, då $x\to-\infty$

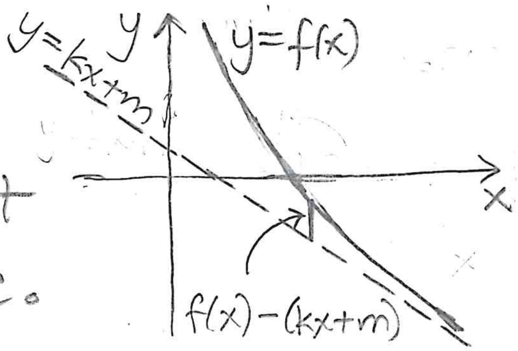
Ex. $f(x)=e^x \begin{cases}\to 0, \text{ då } x\to-\infty\\ \to \infty, \text{ då } x\to\infty\end{cases}$

ingen vågrät asymptot då $x\to\infty$



vågrät asymptot $y=0$, då $x\to-\infty$

Om vågrät asymptot saknas kan man istället undersöka om kurvan möjligen istället kan närma sig en sned linje.



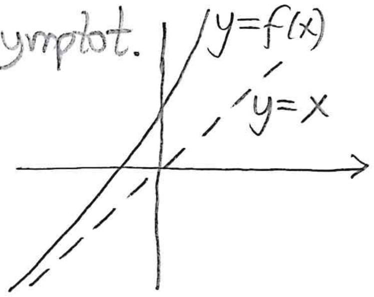
(3)

Def. En linje $y=kx+m$ sägs vara en sned asymptot till $y=f(x)$ om

$$f(x)-(kx+m)\to 0, \text{ då } x\to-\infty \text{ och/eller } x\to\infty$$

Anm. Speciallfallet $k=0$ ger en vågrät asymptot.

Ex. $f(x)=x+e^x$



$$f(x)-x=e^x\to 0, \text{ då } x\to-\infty$$

så $y=x$ är en sned asymptot då $x\to-\infty$
(obs! kurvan har ingen asymptot då $x\to\infty$)

Ex. $f(x)=\dfrac{2x^2+x+2}{x+1}\underset{\uparrow}{=}2x-1+\dfrac{3}{x+1}\Rightarrow$

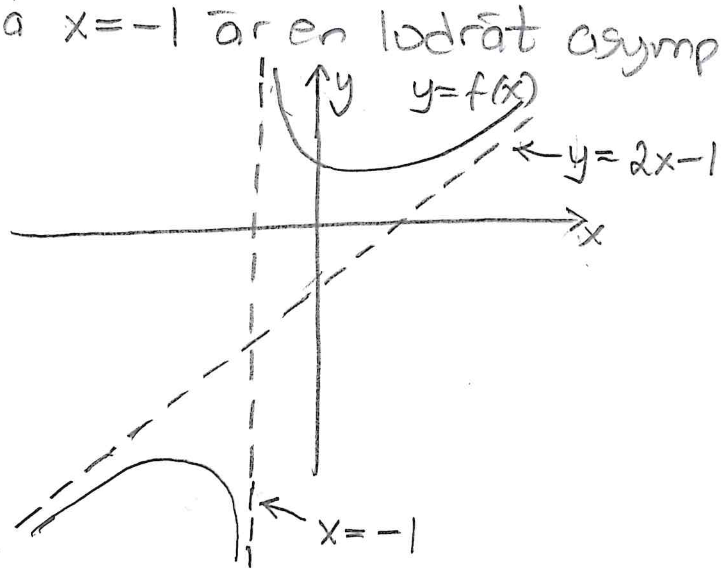
polynomdivision

$$f(x)-(2x-1)=\frac{3}{x+1}\to 0, \text{ då } x\to\pm\infty$$

så $y=2x-1$ är en sned asymptot då $x\to\pm\infty$
vi avläser också att;

$$f(x)=2x-1+\frac{3}{x+1}\begin{array}{l}\nearrow -\infty, \text{ då } x\to-1^-\\ \searrow \infty, \text{ då } x\to-1^+\end{array}$$

så $x=-1$ är en lodrät asymptot



④

Sats. 7.5.1 $y=kx+m$ är en sned asymptot till $y=f(x)$ då $x\to\infty$ om och endast om;

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=k \quad \text{och} \quad \lim_{x\to\infty}\left[f(x)-kx\right]=m$$

Motsvarande villkor gäller för sned asymptot då $x\to-\infty$

Ex. $f(x)=\dfrac{2x^2+x+2}{x+1}$

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{2x^2+x+2}{x(x+1)}=\frac{2x^2+x+2}{x^2+x}=\frac{2+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}\to \underline{2=k}, \text{ då } x\to\pm\infty$$

$$f(x)-kx=\frac{2x^2+x+2}{x+1}-2x=\frac{2x^2+x+2-2x(x+1)}{x+1}=$$

$$=\frac{-x+2}{x+1}=\frac{-1+\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}}\to \underline{-1=m}, \text{ då } x\to\pm\infty$$

så $y=2x-1$ är en sned asymptot då $x\to\pm\infty$
(samma som vi fick med polynomdiv. i tidigare ex)

Nu några fler s.k. "standardgränsvärden" som kan vara användbara vid bestämning av asymptoter.

Sats. 7.5.2 För alla värden på p och för $q>0$ gäller;

① $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^p}{e^{qx}}=0$ ② $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)^p}{x^q}=0$

Ex. $f(x) = (x+1)e^{2x}$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x+1}{x}e^{2x} = \left(1+\frac{1}{x}\right)e^{2x} \begin{cases} \to 0 = k, & då\ x \to -\infty \\ \to \infty, & då\ x \to \infty \end{cases}$$

$$f(x) - \underbrace{kx}_{=0} = (x+1)e^{2x} \underset{x=-t}{=} (1-t)e^{-2t} = \underbrace{\frac{1}{e^{2t}}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{t}{e^{2t}}}_{\to 0} \to 0 = m \quad då\ x \to -\infty$$

enl. sats ovan

så $y = 0$ är en vågrät asymptot då $x \to -\infty$.

Ex. $f(x) = e^{-x}\ln(x^2)$, $D_f : x \neq 0$

$\underline{x \to 0^{\pm}}$: $f(x) = \underbrace{e^{-x}}_{\to 1}\underbrace{\ln(x^2)}_{\to -\infty} \to -\infty$, då $x \to 0^{\pm}$

så $x = 0$ är en lodrät asymptot då $x \to 0^{\pm}$

$\underline{x \to -\infty}$: $f(x) = \underbrace{e^{-x}}_{\to \infty}\underbrace{\ln(x^2)}_{\to \infty} \to \infty$, då $x \to -\infty$

$$\frac{f(x)}{x} = \underbrace{\frac{e^{-x}}{x}}\underbrace{\ln(x^2)}_{\to \infty} \to -\infty, \quad då\ x \to -\infty$$

$$\underset{x=-t}{=} \frac{-1}{\underbrace{t/e^{t}}_{\to 0^+ \text{ då } t \to \infty}} \to -\infty, \quad då\ t \to \infty \text{ dvs } x \to -\infty$$

så kurvan har ingen sned asymptot då $x \to -\infty$

$\underline{x \to \infty}$: $f(x) = \underbrace{e^{-x}}_{\to 0}\underbrace{\ln(x^2)}_{\to \infty} = \underbrace{\frac{x}{e^x}}_{\to 0} \cdot 2 \cdot \underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{\to 0} \to 0$, då $x \to \infty$

enl. sats ovan

så $y = 0$ är en vågrät asymptot då $x \to \infty$