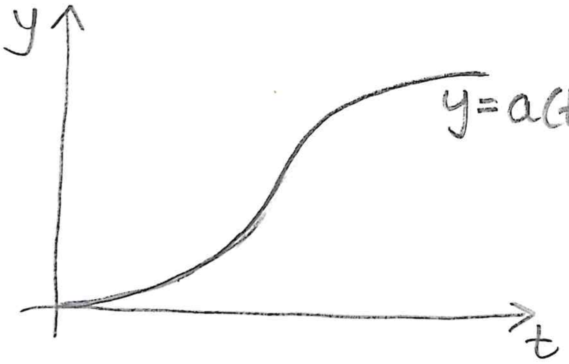
(1)

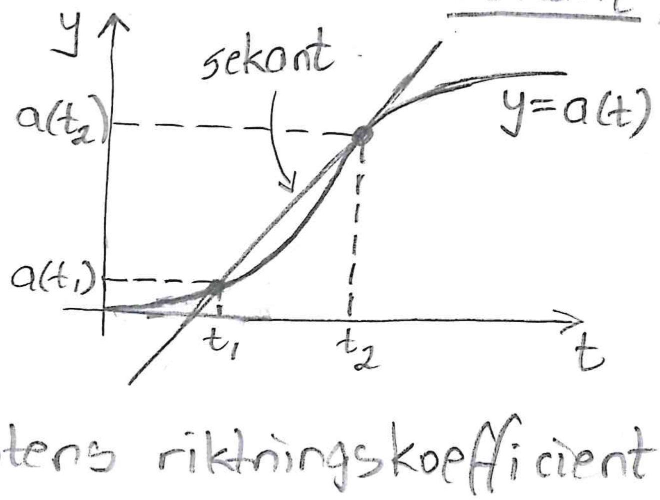
Föreläsning 1, 17 jan 2022

Avs. 6.2

Antag att en funktion $a(t)$ beskriver hur långt en person cyklat t minuter efter en viss given tidpunkt, och att dess graf har foljande utseende;



Om vi drar en linje mellan två punkter på kurvan så får vi en sekant;

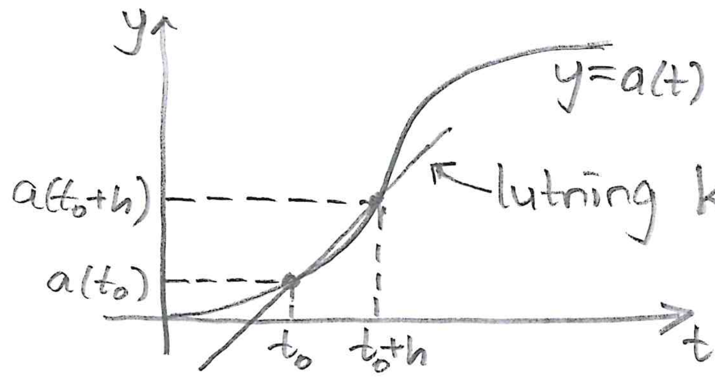


Sekantens riktningskoefficient $k_s = \dfrac{a(t_2)-a(t_1)}{t_2-t_1}$ ger ett mått på hur långt personen cyklat mellan två tidpunkter i relation till hur lång tid som gått.

Värdet på k_s sägs vara cyklistens medelhastighet i intervallet $[t_1, t_2]$

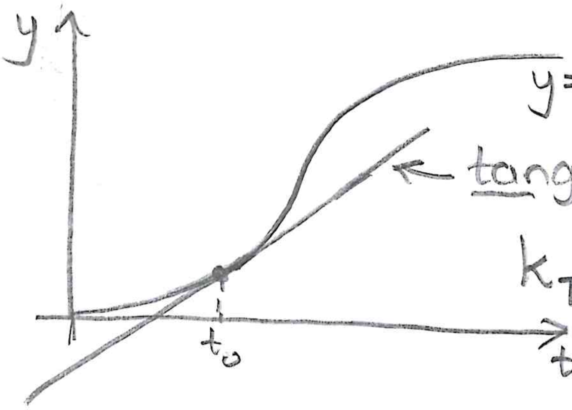
(2)

Om man är intresserad av cyklistens fart vid en viss tidpunkt t_0 så kan vi mäta medelhastigheten i ett intervall $[t_0, t_0+h]$, för något litet $h>0$.



$$k_s = \frac{a(t_0+h) - a(t_0)}{h}$$

Låter vi sedan $h \to 0$ får vi den momentana hastigheten vid tidpunkten t_0, vilket kan tolkas som lutningen på den linje som tangerar grafen i punkten $(t_0, a(t_0))$;



$$k_T = \lim_{h \to 0} \frac{a(t_0+h) - a(t_0)}{h}$$

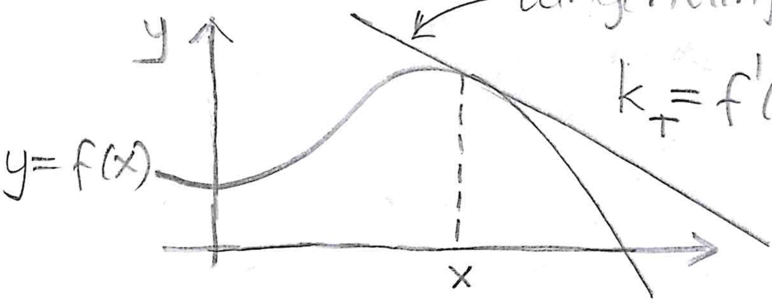
Även i många andra sammanhang är man intresserad av att studera hur snabbt en viss storhet förändras relativt en annan storhet.

(3)

Mer allmänt:

Om $f(x)$ beskriver värdet på en storhet för ett visst värde x på en annan storhet så definierar vi derivatan av funktionen $f(x)$ i punkten x som gränsvärdet;

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$



tangentlinjens lutning är

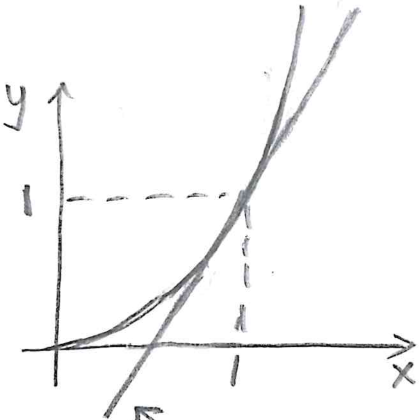
$$k_T = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Exempel $f(x) = x^2$, $x = 1$

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2h + h^2}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} (2+h) = \underline{\underline{2}}$$



lutning

$k_T = f'(1) = 2$

(4)

På liknande vis kan vi beräkna derivatan av $f(x)=x^2$ i en godtycklig punkt x;

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2x\cdot h+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h)=\underline{\underline{2x}}$$

Uppg. Bestäm derivatan av följande funktioner m.h.a. derivatans definition;

konstant

a) $f(x)=x^3$ b) $f(x)=\frac{1}{x}$ c) $f(x)=C$

Lösn. a) $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h}=$$

$$=\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}=3x^2+3xh+h^2\to\underline{\underline{3x^2}}\text{ då } h\to 0$$

så $f(x)=x^3$ har derivatan $f'(x)=3x^2$

b) $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=\frac{\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h}=$$

$$=\frac{\frac{-h}{x(x+h)}}{h}=\frac{-1}{x(x+h)}\to\frac{-1}{x^2}\text{ då } h\to 0$$

så $f(x)=\frac{1}{x}$ har derivatan $f'(x)=\frac{-1}{x^2}$

c) $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{C-C}{h}=\frac{0}{h}=0\to 0,\text{ då } h\to 0$$

så $f(x)=C$ har derivatan $f'(x)=0$

⑤

Mer allmänt kan man visa att om $\underline{f(x) = x^a}$ för något reellt tal a, så är $\underline{f'(x) = ax^{a-1}}$

Notera att detta stämmer på våra exempel ovan;

$$f(x) = x^2 \overset{a=2}{\Longrightarrow} f'(x) = 2x^1 = 2x$$

$$f(x) = x^3 \overset{a=3}{\Longrightarrow} f'(x) = 3x^2$$

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \overset{a=-1}{\Longrightarrow} f'(x) = (-1)x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$$

Här är några fler exempel på denna formel;

$$f(x) = x^7 \overset{a=7}{\Longrightarrow} f'(x) = 7x^6$$

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2} \overset{a=1/2}{\Longrightarrow} f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f(x) = x\sqrt{x} = x^{3/2} \overset{a=3/2}{\Longrightarrow} f'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

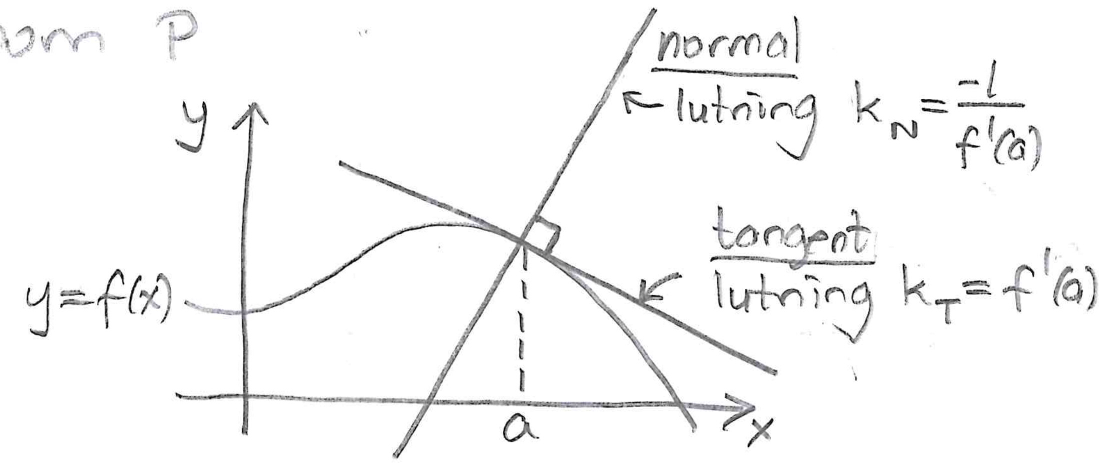
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2} \overset{a=-1/2}{\Longrightarrow} f'(x) = \frac{-1}{2}x^{-3/2} = \frac{-1}{2x\sqrt{x}}$$

<u>Avs. 6.3</u> Vi har sett att $f'(a)$ kan tolkas som riktningskoeff. för tangenten genom $(a, f(a))$ så enpunktsformeln ger att;

<u>Tangentens ekv</u>; $y - f(a) = f'(a)(x-a)$

⑥

Med <u>normalen</u> till en kurva $y=f(x)$ i en punkt $P=(a,f(a))$ menas den linje genom P som är vinkelrät mot kurvans tangent genom P



Från tidigare kurs vet vi att $k_N k_T=-1$ (om $k_T\neq 0$) så $k_N=\frac{-1}{k_T}=\frac{-1}{f'(a)}$

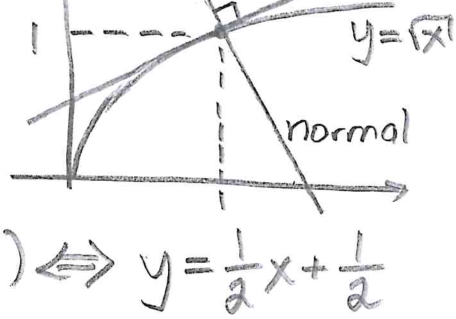
så enpunktsformeln ger att;

<u>Normalens ekv.;</u> $y-f(a)=\frac{-1}{f'(a)}(x-a)$

<u>uppg</u>. Bestäm ekvationen för tangenten och normalen till kurvan $y=\sqrt{x}$ i punkten $(1,1)$

<u>lösn</u>. $f(x)=\sqrt{x}$, $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$,

$f(1)=1$, $f'(1)=\frac{1}{2}$



Tangentens ekv.; $y-1=\frac{1}{2}(x-1) \Leftrightarrow \underline{\underline{y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}}$

Normalens ekv; $y-1=\frac{-1}{1/2}(x-1) \Leftrightarrow \underline{\underline{y=3-2x}}$