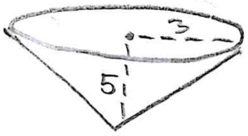
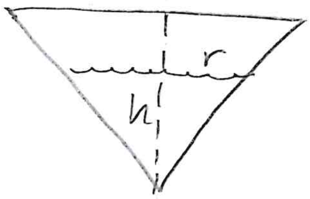
1 forts. avs. 6.7 Föreläsning 4, 24 jan 2022

**uppg** En konisk behållare med basradien 3 dm och höjden 5 dm, fylls med vatten i en hastighet av 2 liter i minuten. Med vilken hastighet höjs vattennivån i behållaren då vattennivån är 4 dm.




**lösn** Låt $V(t)$ vara mängden vatten i behållaren efter $t$ minuter.




$\frac{r}{h} = \frac{3}{5}$

$\Rightarrow r = \frac{3}{5}h$

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{3\pi h^3}{25}$$

så $V(t) = \frac{3\pi}{25} h(t)^3$ och därmed

$$\frac{dV}{dt} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{kedjeregeln}}}{=} \frac{9\pi}{25} h(t)^2 h'(t) = 2 \Rightarrow$$

$$\underbrace{h'(t)}_{\substack{\text{hastigheten} \\ \text{med vilket} \\ \text{vattennivån höjs}}} = \frac{50}{9\pi h(t)^2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Då } h(t)=4}}{=} \frac{25}{72\pi} \approx 0.11 \text{ dm/min}$$

---

## Enhetsanalys av derivata

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Om $f(x)$ mäts i enheten $SI_1$ t.ex. m, kg, W, J och $x$ mäts i enheten $SI_2$ t.ex. s, $m^3$, A, K

så får $f'(x)$ enheten $\underbrace{\frac{SI_1}{SI_2}}_{\text{läses: } SI_1 \text{ per } SI_2}$ t.ex $\underset{\text{fart}}{\frac{m}{s}}$, $\underset{\text{densitet}}{\frac{kg}{m^3}}$, $\underset{\text{spänning}}{\frac{W}{A}}$, $\underset{\text{entropi}}{\frac{J}{K}}$

2

I kedjeregeln har vi;

$$\underbrace{D[\overset{SI_1}{f}(\overset{SI_2}{g}(\overset{SI_3}{x}))]}_{SI_1/SI_3} = \underbrace{f'(g(x))}_{SI_1/SI_2}\ \underbrace{g'(x)}_{SI_2/SI_3}$$

Sambandet mellan enheterna i kedjeregeln blir tydligare om den skrivs på formen;

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \qquad \begin{pmatrix} z = f(g(x)) \\ y = g(x) \end{pmatrix}$$

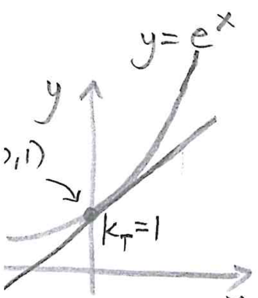
I uppgiften ovan gav kedjeregeln att;

$$\underbrace{\frac{dV}{dt}}_{\frac{dm^3}{min}} = \frac{9\pi}{25}\underbrace{h(t)^2}_{\underbrace{\frac{dm^3}{dm}}_{dm^2}} \cdot \underbrace{h'(t)}_{\frac{dm}{min}}$$

---

## Avs. 6.8

Kom ihåg från förra delkursen att




$f(x)=e^x$ är den exponentialfunktion vars tangent i punkten $(0,1)$ har riktningskoeff. $k_T=1$ (se avs. 2.3). Således är;

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \underline{\underline{\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} \overset{(*)}{=} 1}}$$

Med hjälp av detta standardgränsvärde (*) kan vi visa att;

$$\boxed{D[e^x] = e^x}$$

(3)

bevis $f(x)=e^x \Rightarrow$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=\frac{e^x e^h - e^x}{h}=e^x \underbrace{\frac{e^h-1}{h}}_{\to 1} \xrightarrow{\text{då } h\to 0} e^x$$

enl. (*) ovan

---

Vidare har vi;

$$(**) \quad \underline{\underline{\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h}}} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\frac{e^{\ln(1+h)}-1}{\ln(1+h)}} \overset{k=\ln(1+h)}{=} \lim_{k\to 0}\frac{1}{\underbrace{\frac{e^k-1}{k}}_{\to 1}} = \underline{\underline{1}}$$

varpå vi kan visa att;

$$\boxed{D[\ln x]=\frac{1}{x}}$$

bevis. $f(x)=\ln x \Rightarrow$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}=\frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h}=\underbrace{\frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}}_{\to 1}\cdot\frac{1}{x} \xrightarrow{\text{då } h\to 0} \frac{1}{x}$$

enl. (**) ovan

---

avs. 6.9 Två andra standardgränsvärden från andra delkursen var;

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1 \quad \text{och} \quad \lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}=0 \quad (\text{se avs. 5.3}$$

från vilket vi kan visa att;

$$\boxed{D[\sin x]=\cos x}$$

4

<u>bevis</u> $f(x) = \sin x$

additionsformel för sinus

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} =$$

$$= \frac{\sin x \cos h + \cos x \cdot \sin h - \sin x}{h} =$$

$$= \sin x \underbrace{\frac{\cos h - 1}{h}}_{\to 0} + \cos x \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\to 1} \to \cos x \text{ , då } h \to 0$$

---

På liknande vis som ovan kan man visa att;

$$\boxed{D[\cos x] = -\sin x}$$

varpå kvotregeln också ger att;

$$D[\tan x] = D\left[\frac{\sin x}{\cos x}\right] = \frac{D[\sin x]\cdot \cos x - \sin x \cdot D[\cos x]}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

så $\boxed{D[\tan x] = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}}$

---

Nu några fler exempel på ovanstående derivator i kombination med olika räkneregler.

5

Ex. $\underbrace{D[e^{2x}]}_{f(g(x))\text{ där } f(y)=e^y \,\&\, g(x)=2x} \overset{\text{kedjeregeln}}{=} \underbrace{e^{2x}}_{f'(g(x))} \cdot \underbrace{2}_{g'(x)} = 2e^{2x}$

Ex $D[a^x] = D[e^{\ln(a^x)}] = D[e^{x\ln a}] \overset{\text{kedjeregeln (se ovan)}}{=} e^{x\ln a} \cdot \ln a = a^x \ln a$

så $\boxed{D[a^x] = a^x \ln a}$ Ex $D[2^x] = 2^x \ln 2$

Ex. $D[\underbrace{x^2}_{f(x)}\underbrace{\ln(3x+1)}_{g(x)}] \overset{\text{produktregeln}}{=} \underbrace{2x}_{f'(x)}\underbrace{\ln(3x+1)}_{g(x)} + \underbrace{x^2}_{f(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{3x+1}\cdot 3}_{=g'(x)}$

kedjeregeln

Ex. $D[{}^a\log x] = D\left[\frac{\ln x}{\ln a}\right] = \frac{1}{\ln a} \cdot D[\ln x] = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}$

så $\boxed{D[{}^a\log x] = \frac{1}{x \ln a}}$ Ex. $D[\lg x] =$

$= D[{}^{10}\log x] = \frac{1}{x \ln 10}$

Ex.

$D[\sin^2 x] \overset{\text{kedjeregeln}}{=} 2\sin x \cdot \cos x$

$D[\sin^2 x] \overset{\text{produktregeln}}{=} \cos x \cdot \sin x + \sin x \cdot \cos x = 2\sin x \cos x$

Ex. $D[e^{3x}\cos(5x)] = 3e^{3x}\cos(5x) + e^{3x}(-\sin 5x)\cdot 5$

$= 3e^{3x}\cos(5x) - 5e^{3x}\sin(5x)$

Ex. $D[\sqrt{\tan(2x)}] = \frac{1}{2\sqrt{\tan(2x)}} D[\tan(2x)] =$

$= \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{\tan(2x)}} \cdot \frac{1}{\cos^2(2x)} \cdot \cancel{2} = \frac{\sqrt{\cot(2x)}}{\cos^2(2x)}$