

①

Föreläsning 2, 18 jan 2022forts. av 6.2Derivatans av en funktion $f(x)$ definieras av;

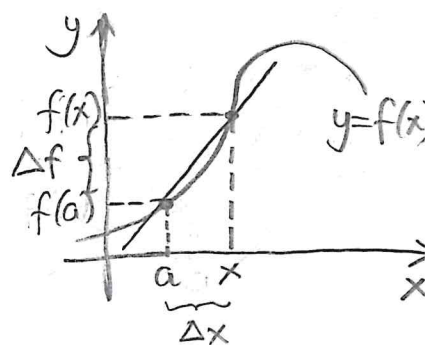
$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Anm. Det finns även andra vanliga beteckningar för derivata t.ex.

f'	$\frac{df}{dx}$	$\dot{f}$	Df
Lagrange notation	Leibniz notation	Newton's notation (används för tidsderivata)	Euler's notation

Anm. Det finns också andra sätt att skriva differenskvoten i definitionen av derivata; t.ex.

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\overbrace{f(x) - f(a)}^{\Delta f}}{\underbrace{x - a}_{\Delta x}}$$

Sats 6.2.1 Om $f(x)$ är deriverbar i x så är $f(x)$ kontinuerlig i x .bevis Om $f(x)$ är deriverbar i x så är;

$$f(x+h) - f(x) = \underbrace{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{\rightarrow f'(x)} \cdot \underbrace{h}_{\rightarrow 0} \rightarrow f'(x) \cdot 0 = 0, \text{ då } h \rightarrow 0$$

så $f(x+h) \rightarrow f(x)$ då $h \rightarrow 0$ vilket visar att $f(x)$ är kontinuerlig i x . $\square$

(2)

Ans. 6.5 & 6.6 Följande deriveringsregler gäller;

$$D[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$$

$$D[C \cdot f(x)] = C \cdot f'(x) \quad (C \text{ konstant})$$

Produktregeln: $D[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

Kvotregeln: $D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$

Ex $D[5x^3 - 4\sqrt{x} + 3] = 5 \cdot 3x^2 - 4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + 0 = 15x^2 - \frac{2}{\sqrt{x}}$

produktregeln

Ex $D[(x^2+7)\sqrt{x}] = \underbrace{2x}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\sqrt{x}}_{g(x)} + \underbrace{(x^2+7)}_{f(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}_{g'(x)} = \frac{5}{2}x\sqrt{x} + \frac{7}{2\sqrt{x}}$

Ex $D\left[\frac{\overbrace{x^2-3x+1}^{f(x)}}{\underbrace{x^3+4x}_{g(x)}}\right] = \frac{(2x-3)(x^3+4x) - (x^2-3x+1)(3x^2+4)}{(x^3+4x)^2} =$
 $= \frac{-x^4 + 6x^3 + x^2 - 4}{(x^3+4x)^2}$

Bevis av produktregeln:

$$D[f(x)g(x)] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overbrace{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h)}^{=0} + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$$

(3)

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\underbrace{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{\rightarrow f'(x)} \underbrace{g(x+h) + f(x)}_{\rightarrow g(x)} \underbrace{\frac{g(x+h) - g(x)}{h}}_{\rightarrow g'(x)} \right] =$$

ty g deriverbar
 $\Rightarrow g$ kontinuerlig

$$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad \text{v.s.B.}$$

Uppg. Bestäm ekvationen för tangenten och normalen till kurvan $y = \frac{x-4}{x+2}$ i den punkt där kurvan skär x-axeln.

Lös. $f(x) = \frac{x-4}{x+2} = 0 \Leftrightarrow x = 4$

så kurvan skär x-axeln i punkten $(4, 0)$

$$f'(x) = \frac{D(x-4) \cdot (x+2) - (x-4)D(x+2)}{(x+2)^2} = \frac{x+2 - (x-4)}{(x+2)^2} = \frac{6}{(x+2)^2}$$

↑
kvotregeln

Spec. är $f'(4) = \frac{6}{(4+2)^2} = \frac{1}{6}$ så $k_T = \frac{1}{6}$ och $k_N = -6$

↑ ↑
tangentens normalens
riktkoeff. rikt.koeff.

Enpunktsformeln ger då att;

Tangentens ekv: $y - 0 = \frac{1}{6}(x - 4) \Leftrightarrow y = \frac{1}{6}x - \frac{2}{3}$

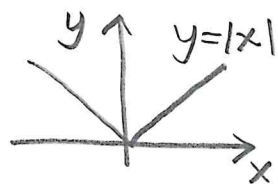
Normalens ekv: $y - 0 = -6(x - 4) \Leftrightarrow y = 24 - 6x$

(4)

Ans. 6.4 Derivatans existerar inte alltid.

Betrakta t. ex. $f(x) = |x|$ i punkten $x = 0$

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1, & \text{om } h > 0 \\ -1, & \text{om } h < 0 \end{cases}$$



vilket saknar gränsvärde då $h \rightarrow 0$.

Om vi definierar;

$$f'_-(a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{vänsterderivata}$$

$$f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{högerderivata}$$

så inser vi att $f(x)$ är deriverbar i a
om och endast om $f'_-(a)$ och $f'_+(a)$ existerar
och är lika dvs. $f'_-(a) = f'_+(a)$

Ex. $f(x) = x^2|x|$, $a = 0$

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{h^2|h|}{h} = h|h| = \begin{cases} h^2, & \text{om } h > 0 \\ -h^2, & \text{om } h < 0 \end{cases}$$

Vi ser att $f'_-(0)$ och $f'_+(0)$ existerar och
att $f'_-(0) = 0 = f'_+(0)$ så $f(x)$ är deriverbar
i $x = 0$ och $f'(0) = 0$