(1)

Föreläsning 3, 19 jan 2022

forts. avs. 6.4 Betrakta en styckvis definierad funktion på formen
$$f(x)=\begin{cases} g(x), & \text{då } x\le a \\ r(x), & \text{då } x>a \end{cases}$$
där $g(x)$ och $r(x)$ är deriverbara funktioner.

Notera att $f(x)$ är kontinuerlig i $x=a$ om

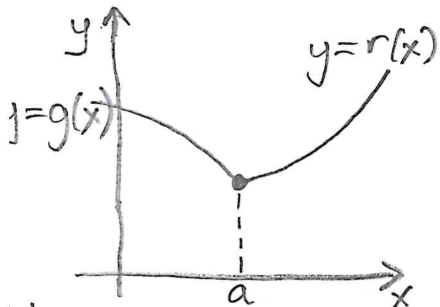
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \underline{g(a)=r(a)} = \lim_{x\to a^+} f(x)$$

och för att $f(x)$ även skall vara deriverbar i $x=a$ krävs att;

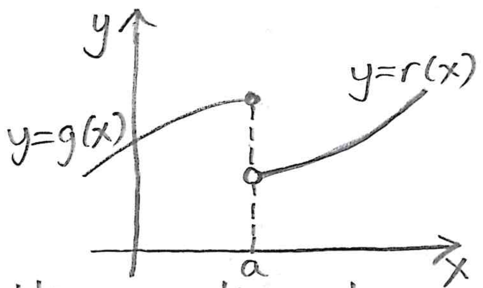
$$f_-'(a) = \underline{g'(a)=r'(a)} = f_+'(a)$$

obs! $f(x)$ deriverbar i $x=a \Rightarrow f$ kont. i $x=a \Rightarrow$

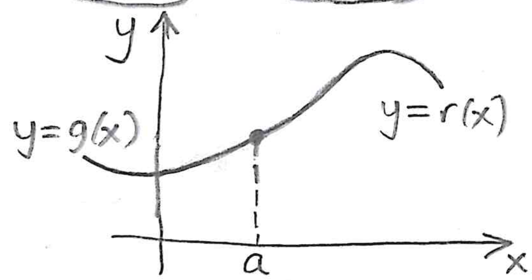
$$f_+'(a) = \lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \underset{h>0}{=} \lim_{h\to 0^+}\frac{r(a+h)-g(a)}{h} \overset{g(a)=r(a)}{=} \lim_{h\to 0^+}\frac{r(a+h)-r(a)}{h} = r'(a)$$



Här är $g(a)=r(a)$ men $g'(a)\neq r'(a)$ så $f(x)$ är kont. men ej deriverbar i $x=a$.



Här är $g'(a)=r'(a)$ men $g(a)\neq r(a)$ så $f(x)$ är inte ens kont. i $x=a$



Här är både $g(a)=r(a)$ och $g'(a)=r'(a)$ så $f(x)$ är deriverbar i $x=a$

② **Uppg.** Bestäm om möjligt konstanterna c och d så att
$$f(x)=\begin{cases} x^2+c, & \text{då } x\le 2 \\ d\sqrt{x}, & \text{då } x>2 \end{cases}$$
blir deriverbar i $x=2$

Lösn. $f(x)$ är deriverbar i $x=2$ om;

$$\begin{cases} 4+c=d\sqrt{2} & \leftarrow \lim_{h\to 2^-} f(x)=\lim_{h\to 2^+} f(x) \\ 4=\dfrac{d}{2\sqrt{2}} & \leftarrow f_-'(2)=f_+'(2) \end{cases}$$

Ur den andra ekvationen får vi att $d=8\sqrt{2}$ som insatt i den första ekv. ger;

$$4+c=16 \Leftrightarrow c=12$$

Så $f(x)$ blir deriverbar i $x=2$ om $c=12$ och $d=8\sqrt{2}$

Anm. Vi säger att;

- $f(x)$ är <u>deriverbar i punkten</u> a om $f'(a)$ existerar
- $f(x)$ är <u>deriverbar i intervallet</u> $[a,b]$ om $f(x)$ är deriverbar i varje punkt $x\in[a,b]$
- $f(x)$ är <u>deriverbar</u> om $f(x)$ är deriverbar i alla punkter i D_f.

$\uparrow$ Definitionsmängden.

(3)

Avs. 6.7 Sats 6.7.1 (Derivata av sammansatta funktioner)

Om g är deriverbar i x och f är deriverbar i $g(x)$ så är;

$$D[f(g(x))] = f'(g(x))g'(x) \leftarrow \text{Kedjeregeln}$$

Ex. $D[\underbrace{(x^3-2x+5)^7}_{f(g(x))\text{ där}}] = \underbrace{7(x^3-2x+5)^6}_{f'(g(x))}\underbrace{(3x^2-2)}_{g'(x)}$

yttre funktion $\rightarrow f(y) = y^7$ och
inre funktion $\rightarrow g(x) = x^3-2x+5$

Ex. $D[\underbrace{\sqrt{x^2+1}}_{f(g(x))\text{ där}}] = \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}}_{f'(g(x))} \cdot \underbrace{2x}_{g'(x)} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$f(y) = \sqrt{y}$ och
$g(x) = x^2+1$

Ex. $D[x\sqrt{x^2+1}] \overset{\uparrow}{=} 1 \cdot \sqrt{x^2+1} + x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$

produktregeln

Anm. $D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = D[f(x)g(x)^{-1}] \overset{\text{produktregeln}}{=}$

$= f'(x)g(x)^{-1} + f(x)\cdot D[g(x)^{-1}] \overset{\text{kedjeregeln}}{=}$

$= f'(x)g(x)^{-1} + f(x)(-1)g(x)^{-2}\cdot g'(x)$

$$= \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g'(x)}{g(x)^2} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

④

Bevisidé kedjeregeln:

$$D[f(g(x))] = \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(\overbrace{g(x+h)-g(x)}^{k}+\overbrace{g(x)}^{y}) - f(\overbrace{g(x)}^{y})}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(y+k)-f(y)}{k} \cdot \frac{\overbrace{g(x+h)-g(x)}^{k}}{h}$$

$$= f'(y)\cdot g'(x) = f'(g(x))\,g'(x)$$

ty $k = g(x+h) - g(x) \to 0$ då $h \to 0$

obs! I detta argument krävs att $k \neq 0$. Detta kan dock lösas med lite mindre justeringar (som vi inte går in närmare på här)

Anm Med $y = g(x)$ och $z = f(g(x)) = f(y)$ kan kedjeregeln skrivas;

$$\underbrace{\frac{dz}{dx}}_{D[f(g(x))]} = \underbrace{\frac{dz}{dy}}_{f'(g(x))} \cdot \underbrace{\frac{dy}{dx}}_{g'(x)}$$

Denna faktor i kedjeregeln kallas <u>inre derivatan</u>