

①

Föreläsning 10, 28 feb 2022

Avs. 8.1 (Andraderivata)

Def. En funktion $f(x)$ sägs vara två gånger deriverbar om $f'(x)$ är deriverbar och denna s.k. andra derivata betecknas $f''(x)$ dvs.

$$f''(x) = D[f'(x)] \quad (= D[D[f(x)]])$$

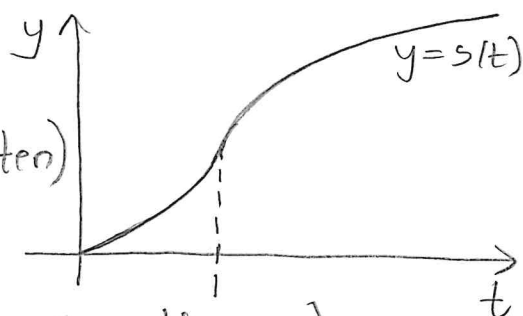
Anm. Andraderivatan betecknas också $D^2 f(x)$, $\frac{d^2 f}{dx^2}$

Anm. Om $s(t)$ anger den sträcka en partikel förflyttat sig efter en viss tid t så anger;
 $v(t) = s'(t)$ partikeln hastighet vid tiden t
 $a(t) = s''(t)$ partikeln acceleration vid tiden t .

Ex. $s(t) = \frac{\pi}{4} + \arctan(t-1)$

$$v(t) = s'(t) = \frac{1}{1+(t-1)^2} \text{ (hastigheten)}$$

$$a(t) = s''(t) = \frac{-2(t-1)}{(1+(t-1)^2)^2} \text{ (accelerationen)}$$



Notera att hastigheten är som störst där $t=1$

Notera också att;

$$s''(t) = \begin{cases} > 0, \text{ då } 0 \leq t < 1 \leftarrow \text{positiv acceleration} \\ & \text{dvs. ökande hastighet} \\ = 0, \text{ då } t = 1 \\ < 0, \text{ då } t > 1 \leftarrow \text{negativ acceleration} \\ & \text{dvs. minskande hastighet} \end{cases}$$

(2)

Ans. 8.2 Antag att $f'(a) = 0$, $f''(a) > 0$ och att $f''(x)$ är kontinuerlig i $x=a$. Då är;
 $f''(x) > 0$ i en omgivning av $x=a$ dvs.
 $f'(x)$ är strängt växande i en omg. av $x=a$
 vilket ger följande teckenschema;

x	$<$	a	$>$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$

så $f(x)$ har ett lokalt minimum i $x=a$.

På liknande vis ser vi att $f(x)$ har ett lokalt maximum om istället $f''(a) < 0$.

Man kan visa följande (något starkare) resultat;

Sats. 8.2.1 Om $f(x)$ är deriverbar i en omgivning till $x=a$ och $f'(a) = 0$ så gäller att;

$f''(a) < 0 \Rightarrow f(x)$ har lokalt maximum i $x=a$

$f''(a) > 0 \Rightarrow f(x)$ har lokalt minimum i $x=a$

Ex. $f(x) = 2 - x \ln x$

$$f'(x) = -\ln x - x \cdot \frac{1}{x} = -\ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow \underbrace{x = e^{-1}}_{\text{kritisk punkt}}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x}, \quad f''(e^{-1}) = -e < 0$$

så $f(x)$ har lokalt maximum i $x = e^{-1}$

③

Ex. $f(x) = x^4$

$f'(x) = 4x^3 = 0 \Leftrightarrow \underbrace{x=0}_{\text{kritisk punkt}}$

$f''(x) = 12x^2, f''(0) = 0$

så satsen ger ingen info om den kritiska punkten $x=0$.

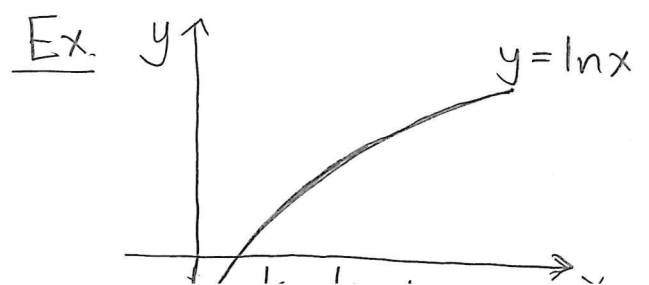
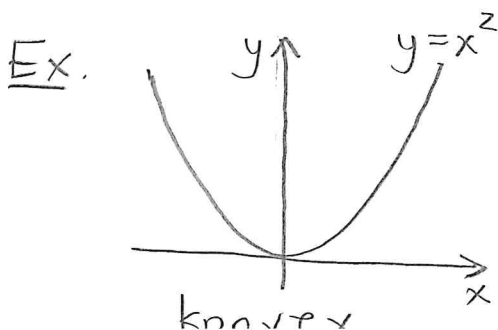
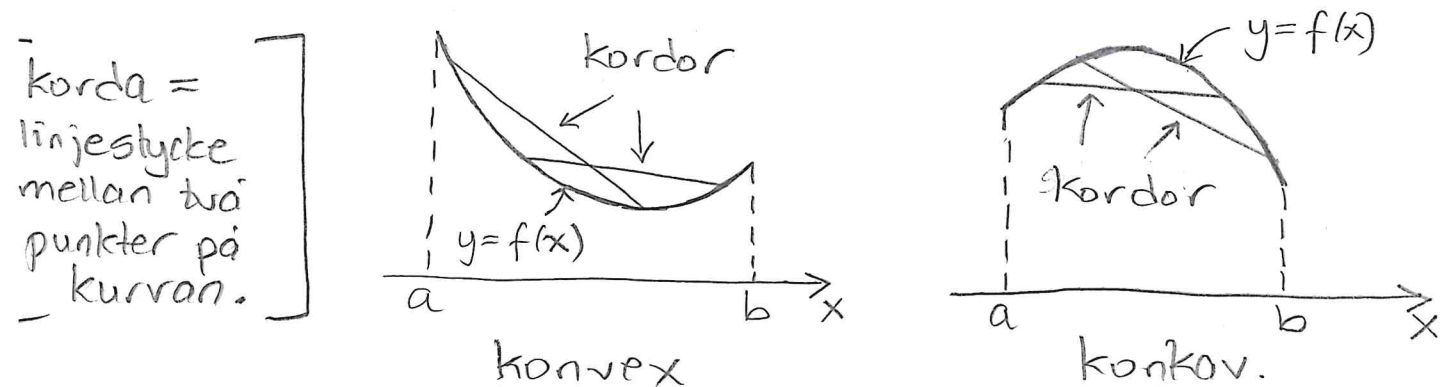
Men teckenstudie av derivatan ger;

x		0	
$f'(x)$	-	0	+
$f'(x)$	>	0	↗

så $f(x)$ har lokalt minimum i $x=0$.

Def. Om alla kordor till en kurva $y=f(x)$, på ett intervall I , ligger över kurvan så sägs $f(x)$ vara konvex på I .

Om kordorna istället ligger under kurvor, så sägs $f(x)$ vara konkav på I .



④ Anm. Av figurena ovan inser vi att;

$$\begin{cases} f(x) \text{ är konvex om lutningen på tangenterna ökar på } I. \\ f(x) \text{ är konkav} \quad \text{---||---} \quad \text{minskar på } I. \end{cases}$$

dvs.

$$\begin{cases} f(x) \text{ konvex om } f'(x) \text{ växer på } I \\ f(x) \text{ konkav om } f'(x) \text{ avtar på } I \end{cases}$$

dvs.

$$\begin{cases} f''(x) > 0 \text{ på } I \Rightarrow f(x) \text{ konvex på } I \\ f''(x) < 0 \text{ på } I \Rightarrow f(x) \text{ konkav på } I \end{cases}$$

(se Sats 8.2.2 och appendix för bevis)

Ex. $f(x) = 4x^3 - x^4$

$$f'(x) = 12x^2 - 4x^3 = 4x^2(3-x) = 0 \Leftrightarrow x=0 \text{ eller } x=3$$

$$f''(x) = 24x - 12x^2 = 12x(2-x) = 0 \Leftrightarrow x=0 \text{ eller } x=2$$

Teckenstudie på andraderivatan ger;

x	$<$	0	$<$	2	$<$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

så $f(x)$ är konvex på intervallet $(0, 2)$ och konkav på $(-\infty, 0)$ resp. $(2, \infty)$

Vi kan kombinera info från andraderivator med info om derivator i en gemensam tecken tabell:

x		0		2		3	
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	n	$\nearrow$	$\parallel$	$\nearrow$	17	$\searrow$

