Föreläsning 11, 2 mars 2022

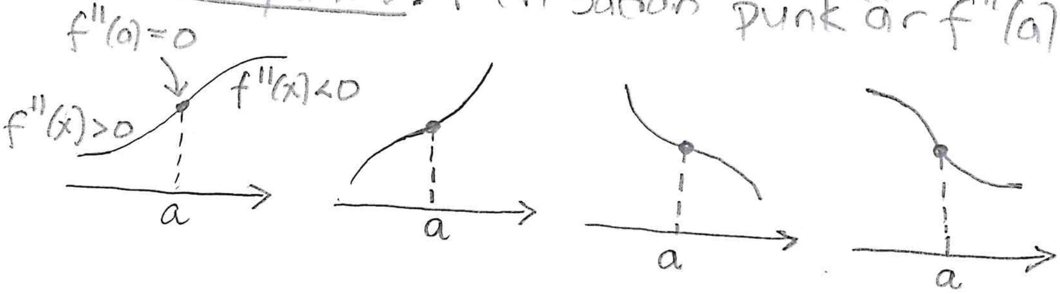
forts. övs. 8.2

Kom ihåg att;

$f''(x) > 0,\ \forall x \in I \Rightarrow f(x)$ konvex på I 

$f''(x) < 0,\ \forall x \in I \Rightarrow f(x)$ konkav på I 

Anm. En punkt $x=a$ där $f(x)$ växlar från konvex till konkav eller vice versa kallas för <u>inflexionspunkt</u>. I en sådan punk är $f''(a)=0$



Uppg. Bestäm i vilka intervall som $f(x)=e^{-x^2}$ är konvex resp. konkav och bestäm alla inflexionspunkter.

Lösn. $f'(x) = -2xe^{-x^2}$

$$f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = 4\left(x^2-\tfrac{1}{2}\right)e^{-x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

x	$<$	$-1/\sqrt{2}$	$<$	$1/\sqrt{2}$	$<$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$f(x)$ är konvex på intervallen $\left(-\infty, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ resp. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty\right)$

$f(x)$ är konkav på intervallet $\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$f(x)$ har inflexionspunkt i $x=\frac{-1}{\sqrt{2}}$ och $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$

Notera i ovanstående uppgift att;

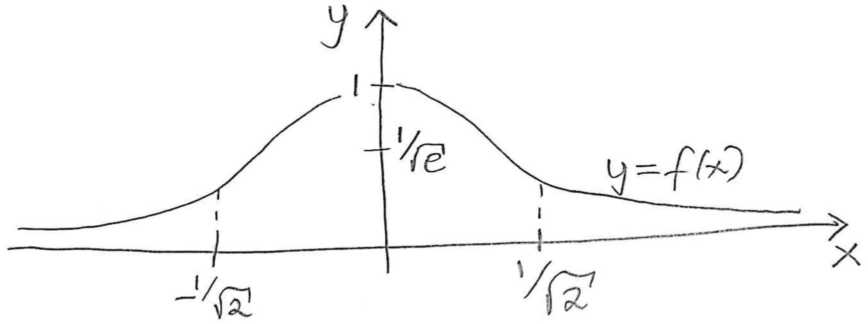
$f'(x) = -2xe^{-x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (kritisk punkt)

och att;

$f(x) = e^{-x^2} \to 0$, då $x \to \pm\infty$ ($y=0$ vågrät asymptot)

vilket ger oss det utvidgade teckenschemat;

x	$-\infty$		$-1/\sqrt{2}$		0		$1/\sqrt{2}$		∞
$f''(x)$	$-$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$f(x)$	0	↗	$1/\sqrt{e}$	↗	1	↘	$1/\sqrt{e}$	↘	0



Avs. 8.3 Vi kan också tredje derivata $f'''(x)$ och högre derivator genom;

$$f^{(n)}(x) = D\left[D^{n-1}f(x)\right]$$

En <u>differentialekvation</u> (DE) är en ekvation med en okänd funktion (ofta betecknad med y) och dess derivator ($y', y'', y''', \ldots$) t.ex.

1. $xy' + y = 3x^2$ (linjär av första ordningen)
2. $2xy' = \frac{1}{y}$ (separabel)
3. $y'' + y' - 2y = 3e^x$ (linjär av andra ordningen med konstanta koefficienter)

(3)

Uppg. Visa att;

a) $y = x^2 + \frac{1}{x}$ är en lösning till DE (1) ovan.

b) $y = \sqrt{1+\ln x}$ —"— (2) ovan.

c) $y = xe^x$ —"— (3) ovan.

Lösn. a) $y' = 2x - \frac{1}{x^2}$ som insatt i DE ger;

$$VL = xy' + y = x\left(2x - \frac{1}{x^2}\right) + \left(x^2 + \frac{1}{x}\right) = 3x^2 = HL.$$ VSV.

b) $y' = \frac{1}{2x\sqrt{1+\ln x}}$ som insatt i DE ger;

$$VL = 2xy' = 2x \cdot \frac{1}{2x\sqrt{1+\ln x}} = \frac{1}{\sqrt{1+\ln x}} = \frac{1}{y} = HL$$ VSV.

c) $y' = e^x + xe^x = (1+x)e^x$

$y'' = e^x + (1+x)e^x = (2+x)e^x$

som insatt i DE ger;

$$VL = y'' + y' - 2y = (2+x)e^x + (1+x)e^x - 2xe^x = 3e^x = HL$$ VSV.

Mer om derivata av logaritmer

$$\ln|x| = \begin{cases} \ln x, & \text{då } x > 0 \\ \ln(-x), & \text{då } x < 0 \end{cases}$$ så

$$D[\ln|x|] = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{då } x > 0 \\ \frac{1}{-x} \cdot (-1), & \text{då } x < 0 \end{cases} = \frac{1}{x}$$

Detta är alltså derivatan av $\ln|x|$ även då $x<0$