

Sammanställning av bevis

MVE425 Matematik, del D, våren 2020

1 Formeln för en aritmetisk summa

Sats. Om $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ är en aritmetisk talföljd med differens d så är

$$\sum_{k=1}^n a_k = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} = n \cdot \frac{2a_1 + (n-1)d}{2}.$$

Bevis. Eftersom $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ är en aritmetisk talföljd gäller

$$a_k = a_1 + (k-1)d \quad \text{och} \quad a_k - (k-1)d = a_1$$

för alla k . Låt nu s_n beteckna summan, skriv den en gång framlänges och en gång baklänges, och addera:

$$\begin{aligned} s_n &= (a_1) + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + (a_1 + (n-2)d) + (a_1 + (n-1)d) \\ s_n &= (a_n) + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \dots + (a_n - (n-2)d) + (a_n - (n-1)d) \\ 2s_n &= \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n)}_{n \text{ parenteser}} + (a_1 + a_n) \end{aligned}$$

Eftersom $2s_n = n(a_1 + a_n)$ måste alltså $s_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$. (Det andra uttrycket får vi genom att sätta in $a_n = a_1 + (n-1)d$.) $\square$

Satsen går även att bevisa med induktion eller genom att först visa specialfallet

$$\sum_{k=1}^n = \frac{n(n+1)}{2}$$

och sedan utnyttja lineariteten hos summabeteckningen.

2 Formeln för en geometrisk summa

Sats. Om $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ är en geometrisk talföljd med kvoten $q \neq 1$ så är

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n a_1 q^{k-1} = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Bevis. Idén är att skriva ut summan, multiplicera den med $1 = \frac{1-q}{1-q}$, och förenkla:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n a_1 q^{k-1} &= a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-1} = a_1(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}) \\ &= a_1 \cdot \frac{1-q}{1-q} \cdot (1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}) \\ &= a_1 \cdot \frac{1}{1-q} \cdot (1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} - q - q^2 - \dots - q^{n-1} - q^n) \\ &= a_1 \cdot \frac{1}{1-q} \cdot (1 - q^n) = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}.\end{aligned}$$

□

□

3 Satsen om termerna i en konvergent serie

Sats. Om serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är konvergent så gäller det att $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Bevis. Låt s_n beteckna seriens n :e delsumma, dvs $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$. Då är

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k = \underbrace{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}}_{s_{n-1}} + a_n = s_{n-1} + a_n \quad \Leftrightarrow \quad a_n = s_n - s_{n-1}.$$

Att serien är konvergent betyder att $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ för något tal $s \in \mathbb{R}$. Då gäller ju även att $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = s$, och alltså blir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n - s_{n-1} = s - s = 0,$$

vilket skulle visas.

□

4 Skillnaden mellan två primitiva funktioner

Sats. Om F och G båda är primitiva funktioner till f , så är $G(x) = F(x) + C$.

Bevis. Låt $H(x) = G(x) - F(x)$. Då blir

$$H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Enligt följsatsen till Lagranges medelvärdessats måste då $H(x) = C$ för alla x för någon konstant C , det vill säga $G(x) - F(x) = C \Leftrightarrow G(x) = F(x) + C$. □

5 Partialintegration

Sats. Antag att $F(x)$ är en primitiv funktion till $f(x)$ och att $g(x)$ är deriverbar. Antag även att $f(x)$ och $g(x)$ är kontinuerliga. Då gäller

$$\int f(x)g(x) dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x) dx.$$

Bevis. Enligt produktregeln är

$$\begin{aligned} D[F(x)g(x)] &= F'(x)g(x) + F(x)g'(x) = f(x)g(x) + F(x)g'(x) \quad \Leftrightarrow \\ f(x)g(x) &= D[F(x)g(x)] - F(x)g'(x). \end{aligned}$$

Genom att nu integrera båda leden får vi det önskade resultatet

$$\int f(x)g(x) dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x) dx.$$

□

6 Analysens huvudsats

Sats. Antag att f är en kontinuerlig funktion på det slutna intervallet $[a, b]$, och definiera funktionen F på $[a, b]$ genom

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Då är F deriverbar och en primitiv funktion till f , det vill säga $F'(x) = f(x)$.

Bevis. Enligt definitionen av derivata är

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}.$$

Vi ska alltså visa att

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x).$$

Vi studerar först täljaren i uttrycket i vänsterledet.

$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) &= \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \\ &= \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+h} f(t)dt. \end{aligned}$$

Enligt integralkalkylens medelvärdessats finns det ett tal $\xi \in [x, x+h]$ (som beror på h) sådant att

$$\int_x^{x+h} f(t)dt = f(\xi)((x+h) - x) = hf(\xi), \quad (1)$$

och eftersom $x \leq \xi \leq x+h$ måste $\xi \rightarrow x$ då $h \rightarrow 0$. Eftersom f är kontinuerlig medför detta att $f(\xi) \rightarrow f(x)$ då $h \rightarrow 0$. Vi får

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{hf(\xi)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(\xi) = f(x),$$

vilket skulle visas. □

7 Metoden med integrerande faktor

Sats. Alla lösningar till den linära differentialekvationen

$$y' + g(x)y = h(x)$$

ges av

$$y(x) = e^{-G(x)} \int e^{G(x)} h(x) dx,$$

där $G(x)$ är en primitiv funktion till $g(x)$.

Bevis. Låt $G(x)$ vara en primitiv funktion till $g(x)$, och multiplicera båda leden i differentialekvationen med den *integrerande faktorn* $e^{G(x)}$:

$$\underbrace{e^{G(x)}y' + e^{G(x)}g(x)y}_{=D[e^{G(x)}y]} = e^{G(x)}h(x).$$

Vänsterledet blir då precis derivatan av $e^{G(x)}y$, och genom att integrera båda leden och sedan lösa ut y får vi

$$e^{G(x)}y = \int e^{G(x)}h(x) dx \quad \Leftrightarrow \quad y(x) = e^{-G(x)} \int e^{G(x)}h(x) dx,$$

vilket skulle visas. □