

MVE670 Linjär algebra F1/TM1

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt. **Motivera noga alla svar på uppgifterna!** Om en uppgift tar tid, fastna inte utan gå vidare med nästa.

Betygsgränser: 3: 20 p, 4: 30 p, 5: 40 (max 50 p).

Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

1. (a) Beräkna $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \\ 8 & -1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ och $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 8 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$

(b) Ange ett egenvärde till $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \\ 8 & -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$

(6 p)

2. Låt K vara kuben med hörn i $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$, d v s med hörn $P_1 = (1, 1, 1)$, $P_2 = (1, -1, 1)$, $P_3 = (1, -1, -1)$, $P_4 = (1, 1, -1)$, $P_5 = (-1, 1, 1)$, $P_6 = (-1, -1, 1)$, $P_7 = (-1, -1, -1)$ och $P_8 = (-1, 1, -1)$. Vidare låt $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildning som avbildar P_1 på P_2 , P_2 på P_3 och P_3 på P_4 .

(a) Vad är volymen av K ?

(b) Bestäm avbildningsmatrisen för f .

(c) Beskriv bilden $f(K)$ av K under f . Bestäm speciellt $f(P_j)$ för $j = 4, 5, 6, 7, 8$. Vad är volymen av $f(K)$?

(8 p)

3. Låt $\mathcal{P}_3$ vara mängden av alla polynom av grad högst 3 och låt $D : \mathcal{P}_3 \rightarrow \mathcal{P}_3, p \mapsto p'$. Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till D .

(6 p)

4. Låt A vara en $(n \times n)$ -matris där $n \geq 2$.

(a) Gäller det att om $\det(A^2) = 0$ så är $\det(A) = 0$? Motivera ditt svar. Om svaret är nej räcker det att ange motexempel.

(b) Gäller det att om $A^2 = \mathbf{0}$ så är $A = \mathbf{0}$? Motivera ditt svar. Om svaret är nej räcker det att ange motexempel.

(4 p)

5. Avgör om $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -5 & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ -6 & -5 & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ är inverterbar och bestäm i så fall A^{-1} .

(6 p)

6. Avgör om nedanstående påståenden är sanna eller falska. Det räcker med svar. Rätt svar på en deluppgift ger 1 poäng. Fel svar på en deluppgift ger -1 poäng. Den totala poängen är dock ≥ 0 . (6 p)

- (a) Mängden av alla polynom av grad minst 3 är ett vektorrum.
(b) Antag att λ är ett egetvärde till A . Då är $n\lambda$ ett egetvärde till A^n .
(c) Låt $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ och $\mathbf{x}$ vara vektorer i $\mathbb{R}^3$. Då gäller att

$$(\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{w} \bullet \mathbf{x}) = (\mathbf{x} \bullet \mathbf{w}) \cdot (\mathbf{v} \bullet \mathbf{u})$$

- (d) Antag att $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_3$ är linjärt oberoende vektorer i $\mathbb{R}^4$. Då spänner $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$ upp $\mathbb{R}^4$.

- (e) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ saknar högerinvers.

- (f) Vektorn $(1, 2, 3)$ ligger i nollrummet till $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

7. Låt $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ vara vektorer i rummet $(\mathbb{R}^3)$. (8 p)

- (a) Definiera vektorprodukten (kryssprodukten) $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.
(b) Visa att vektorprodukten är antikommutativ, d v s att $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$.
(c) Visa att

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}||\mathbf{v}|. \quad (1)$$

När råder likhet i (1)?

- (d) Visa, förslagsvis genom att ge ett motexempel, att vektorprodukten inte är associativ, d v s att

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} \neq \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$$

i allmänhet.

8. Antag att A är en $(n \times n)$ -matris med egetvärden $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Antag att $\lambda_j \neq \lambda_k$ om $j \neq k$. Visa att A är diagonaliserbar. (6 p)

Lycka till!
Elizabeth