

MVE 670 Linjär algebra 22/8 22, lösningar

①

$$1 a) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \\ 8 & -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ \text{red} \\ \text{circled} \\ -1 \end{matrix} \begin{matrix} \uparrow \\ \text{red} \\ \text{circled} \\ -2 \end{matrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 & 0 \\ -3 & -8 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 4 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ \text{red} \\ \text{circled} \\ 1 \end{matrix} = (-1)^{3+4} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -3 & -8 & 3 \\ 4 & -4 & 4 \end{vmatrix} = \text{det linjär i rader}$$

$$(-1) \cdot 2 \cdot (-1) \cdot 4 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 8 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ \text{red} \\ \text{circled} \\ \text{Sarrus} \end{matrix} = 8 \cdot (-8 - 3 + 3 - 8) = -8 \cdot 16 = \underline{\underline{-128}}$$

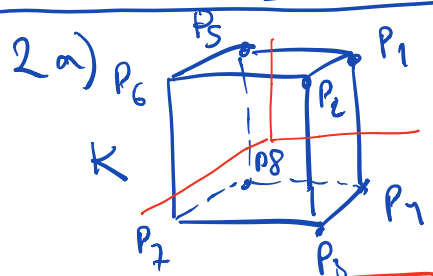
$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 8 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \underline{\underline{0}} \text{ ty rad 1} = \text{rad 3}$$

b) Låt A & B beteckna matriserna som vi tog determinanterna av i a).

Obs $B = A + 2I$.

Vt sig om att $0 = \det B = \det(A + 2I)$.

Alltså -2 egenvärde till A.



Obs $\vec{K}$ spänns upp av tex

$$\vec{P_7P_3} = (1, -1, -1) - (-1, -1, -1) = (2, 0, 0)$$

$$\vec{P_7P_8} = (-1, 1, -1) - (-1, -1, -1) = (0, 2, 0)$$

$$\vec{P_7P_6} = (-1, -1, 1) - (-1, -1, -1) = (0, 0, 2)$$

Alltså $\text{Vol}(K) = \left| \begin{vmatrix} \vec{P_7P_3} & \vec{P_7P_8} & \vec{P_7P_6} \end{vmatrix} \right| = \left| \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \right| = |8| = \underline{\underline{8}}$

b) Avbildningsmatrisen A uppfyller

$$A \begin{pmatrix} \vec{OP_1} & \vec{OP_2} & \vec{OP_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{OP_2} & \vec{OP_3} & \vec{OP_4} \end{pmatrix} \text{ dvs } A \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{=:B} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{=:C}$

Beräkna B^{-1} !

MVE 670 22/8 22

②

$$\begin{aligned}
 [B|I] &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{row 2} - \text{row 1}, \text{row 3} - \text{row 1}} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & | & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & | & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{row 1} \cdot \frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & | & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &\xrightarrow{\text{row 1} - \text{row 2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2 & -2 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & | & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{row 2} \cdot (-\frac{1}{2})} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & | & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{row 3} \cdot (-\frac{1}{2})} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = [I|B^{-1}]
 \end{aligned}$$

Nu följer att

$$\begin{aligned}
 A &= CB^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}}
 \end{aligned}$$

c) Minns att en linjär avbildning avser den parallelepiped med hörn P_j på parallelepiped med hörn $f(\vec{OP}_j)$.

$$f(\vec{OP}_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{OP}_1$$

Anmär $P_1 \mapsto P_1$. På samma sätt ser $P_5 \mapsto P_6, P_6 \mapsto P_2, P_2 \mapsto P_8, P_8 \mapsto P_3$

Anmär f avbilden K på K . Spec $\underline{\underline{\text{Vol}(f(K)) = \text{Vol}(K) = 8}}$

3) Låt $p = p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$

$$Dp = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2$$

Anmär $p \neq 0$ egenvektor till D .

Det är $Dp = \lambda p$ för något λ , dvs

$$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 = \lambda(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) \quad \forall x$$

$$\text{Identifiera koef.} \quad \begin{cases} a_1 = \lambda a_0 & \text{I} \\ 2a_2 = \lambda a_1 & \text{II} \\ 3a_3 = \lambda a_2 & \text{III} \\ 0 = \lambda a_3 & \text{IV} \end{cases}$$

MVE 670 22/8 22

③

Om $\lambda = 0$, så $I - III \Rightarrow a_1 = a_2 = a_3 = 0$, dvs $p = a_0$

Om $\lambda \neq 0$ så $IV \Rightarrow a_3 = 0 \xrightarrow{III} a_2 = 0 \xrightarrow{II} a_1 = 0 \xrightarrow{I} a_0 = 0$, dvs $p = 0$

Eftersom $p \neq 0$ är de enda lösningarna

$\lambda = 0$ & $p = a_0 \neq 0$.

Alltså 0 har egenvärde 0 m egenvektorer $p = a_0 \neq 0$

4a) Minns $\det(AB) = \det A \cdot \det B$

Alltså $\det A^2 = 0 \Rightarrow (\det A)^2 = 0 \Rightarrow \det A = 0$

b) Låt $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq 0$ Då $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$

Alltså gäller inte att $A^2 = 0 \Rightarrow A = 0$.

5) Obs A 7x7-matris sådant att $A^T = -A$ (*)
(A är skewsymmetrisk)

Nu gäller

$$\det A = \det A^T \stackrel{(*)}{=} \det(-A) = (-1)^7 \det A = -\det A$$

($\uparrow$ det linjer i rader)

$$\Rightarrow \det A = 0$$

Alltså är A ej invertibel.

6 a) FALSKT, tag t.ex $p = x^3 + x^2$ $q = x^3$ av grad 3
Då har $p - q = x^2$ grad 2.

b) FALSKT, motex: 1 egenvärde till I, men n ej egenvärde
till $I^n = I$ om $n > 1$.

c) SANT, ty skalärprod & mult av reellmatr är kommutativa.

d) FALSKT ty krävs 4 vektorer för att spanna $\mathbb{R}^4$

MVE 670 22/8 22

④

e) FALSCH $\hookrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$ Auch A hat
minimale, spezielle
Eigenwerte

f) FALSCH $\hookrightarrow A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$

7) $\hookrightarrow$ Sparr Kap 5.2

8) $\hookrightarrow$ Sparr Kap 10, Satz 3
